PHẦN CUỐI: BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8.9.10)

Chủ đề 2. LŨY THỪA – MŨ – LOGARIT

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC)Đạo hàm của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}|3x-1|$ là:

A. $y'=\dfrac{6}{|3x-1|\ln 2}$ **B.** $y'=\dfrac{2}{(3x-1)\ln 2}$ **C.** $y'=\dfrac{6}{(3x-1)\ln 2}$ **D.** $y'=\dfrac{2}{|3x-1|\ln 2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $3x-1\neq 0$

$$y=\log_{\sqrt{2}}|3x-1|\Rightarrow y'=\frac{(3x-1)'}{(3x-1)\ln\sqrt{2}}=\frac{3}{(3x-1)\ln\sqrt{2}}=\frac{6}{(3x-1)\ln 2}.$$

Câu 2: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 16

Hướng dẫn giải

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được : $50+\dfrac{20.2^x}{5^x}\le\dfrac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le 133.\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x,(t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\le 0\Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\le t\le\dfrac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\dfrac{2}{5}\le\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x\le\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\le\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$ nên $a=-4,b=2$

Vậy $b-2a=10$

BÌNH LUẬN

Phương pháp giải bất phương trình dạng $ma^{2\alpha}+n(ab)^{\alpha}+pb^{2\alpha}>0$: chia 2 vế của bất phương trình cho $a^{2\alpha}$ hoặc $b^{2\alpha}$.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14 **B.** 22 **C.** 16 **D.** 19

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[6]{a}, t>0$, từ giả thiết ta có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$$f'\left(t\right)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\frac{2}{\ln 2}.\frac{1}{t}=\frac{\left(3\ln 2-2\ln 3\right)t^3+\left(2\ln 2-2\ln 3\right)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t\geq 1$.

Xét $g\left(t\right)=\left(3\ln 2-2\ln 3\right)t^3+\left(2\ln 2-2\ln 3\right)t^2-2\ln 3$

Ta có $g'\left(t\right)=3\ln\frac{8}{9}t^2+2\ln\frac{4}{9}t=t\left(3\ln\frac{8}{9}t+2\ln\frac{4}{9}\right)$

$$g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{2\ln {}^9\!/_4}{3\ln {}^8\!/_9}<0.$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g\left(t\right)$ giảm trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra $g\left(t\right)\leq g\left(1\right)=5\ln 2-6\ln 3<0\Rightarrow f'\left(t\right)<0$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ luôn giảm trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Nên $t=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f\left(t\right)=0$.

Suy ra $f\left(t\right)>0\Leftrightarrow f\left(t\right)>f\left(4\right)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow\sqrt[6]{a}<4\Leftrightarrow a<4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a=4095$.

Lúc đó $\log_2\left(2017a\right)\approx 22,97764311$.

Nên phần nguyên của $\log_2\left(2017a\right)$ bằng 22.

Đáp án: **B.**

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Biết $x=\frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $2\log_a\left(23x-23\right)>\log_{\sqrt{a}}\left(x^2+2x+15\right)$ (*). Tập nghiệm T của bất phương trình (*) là:

A. $T=\left(-\infty;\frac{19}{2}\right)$. **B.** $T=\left(1;\frac{17}{2}\right)$. **C.** $T=\left(2;8\right)$. **D.** $T=\left(2;19\right)$.

Hướng dẫn giải

$2\log_a\left(23x-23\right)>\log_{\sqrt{a}}\left(x^2+2x+15\right)\Leftrightarrow\log_a\left(23x-23\right)>\log_a\left(x^2+2x+15\right)$

Nếu $a>1$ ta có

$$\log_a(23x-23)>\log_a\left(x^2+2x+15\right)\Leftrightarrow\begin{cases}23x-23>x^2+2x+15\\x^2+2x+15>0\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<19$$

Nếu $0<a<1$ ta có

$$\log_a(23x-23)>\log_a\left(x^2+2x+15\right)\Leftrightarrow\begin{cases}23x-23<x^2+2x+15\\23x-23>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\x>19\end{array}\right.$$

Mà $x=\dfrac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình. Chọn D.

BÌNH LUẬN

- Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y=\log_a b$ đồng biến nếu $a>1$ nghịch biến nếu $0<a<1$

- $$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)>0\\f(x)<g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 5: (T.T DIỆU HIỀN) Tìm m để phương trình:

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$

A. $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $-3<m\le\dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

$$4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$$

$$\Leftrightarrow(m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$$

$$\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)=t^2+5t+1$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$$

$$\Leftrightarrow g(m)=f(t)$$

Xét $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in\left[-1;1\right]$

$$f'\left(t\right)=\frac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\ge 0\ \forall t\in\left[-1;1\right]\Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên đoạn } \left[-1;1\right]$$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g\left(m\right);f\left(t\right)$ cắt nhau $\forall t\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f(-1)\le g\left(m\right)\le f\left(1\right)\Leftrightarrow -3\le m\le \dfrac{7}{3}$

BÌNH LUẬN

Đây là dạng toán ứng dụng hàm số để giải bài toán chứa tham số. Đối với bài toán biện luận nghiệm mà chứa tham số thì phải tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ sau đó cô lập m rồi tìm max, min hàm số.

Câu 6: (LẠNG GIANG SỐ 1) Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}\ge m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\sin^2 x=t\ \left(0\le t\le 1\right)$

$$3^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}\ge m.3^{\sin^2 x}\Leftrightarrow 3^{(1-t)}+2^t\ge 3^t\Leftrightarrow \frac{3}{3^t}+2^t\ge m.3^t\Leftrightarrow \frac{3}{\left(3^t\right)^2}+\left(\frac{2}{3}\right)^t\ge m$$

Đặt: $y=\dfrac{3}{9^t}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\ \left(0\le t\le 1\right)$

$$y'=3.\left(\frac{1}{9}\right)^t.\ln\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^t.\ln\frac{2}{3}<0\Rightarrow \text{Hàm số luôn nghịch biến}$$

t	0		1
f'(t)		–	
f(t)	4	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\le 1$ thì phương trình có nghiệm

Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m=1$.

Câu 7: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt. $\begin{cases}3^{x^2-3x+2}=u\\3^{4-x^2}=v\end{cases}\Rightarrow u.v=3^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$$mu+v=uv+m\Leftrightarrow m(u-1)-v(u-1)=0\Leftrightarrow(u-1)(m-v)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\v=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2-3x+2}=1\\3^{2-x^2}=m(m>0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\4-x^2=\log_3 m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x^2=4-\log_3 m\end{array}\right.$$

Để phương trình có ba nghiệm thì $x^2=4-\log_3 m$ có một nghiệm khác $1;2$. Tức $4-\log_3 m=0\Leftrightarrow m=81$.

Chọn A.

Câu 8: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho $\dfrac{\log a}{p}=\dfrac{\log b}{q}=\dfrac{\log c}{r}=\log x\neq 0;\dfrac{b^2}{ac}=x^y$. Tính y theo p,q,r.

A. $y=q^2-pr$. **B.** $y=\dfrac{p+r}{2q}$. **C.** $y=2q-p-r$. **D.** $y=2q-pr$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

$\dfrac{b^2}{ac}=x^y\Leftrightarrow\log\dfrac{b^2}{ac}=\log x^y$

$\Rightarrow y\log x=2\log b-\log a-\log c=2q\log x-p\log x-r\log x$

$=\log x(2q-p-r)$

$\Rightarrow y=2q-p-r$ (do $\log x\neq 0$).

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\log_a bc=\log_a b+\log_a c,\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,\log_a b^m=m\log_a b$

Câu 9: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

A. 50. **B.** 49. **C.** $\dfrac{149}{3}$. **D.** $\dfrac{301}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. Bấm máy tính Casio fx 570 theo công thức $\sum_{X=1}^{100}\left(\frac{4^{\frac{X}{100}}}{4^{\frac{X}{100}}+2}\right)=\frac{301}{6}$.

Cách 2.Sử dụng tính chất $f(x)+f(1-x)=1$ của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Ta có

$$A=\left[f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right]+f\left(\frac{50}{100}\right)+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$=49+\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}+\frac{4}{4+2}=\frac{301}{6}$$

PS: Chứng minh tính chất của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

Ta có $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1$.

Câu 10: (THTT – 477) Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x=\log_2 a\Rightarrow a=2^x$; $y=\log_2 b\Rightarrow b=2^y$.

Ta có $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}x+y=5\\ x+\frac{1}{3}y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=15\\ 3x+y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$. Suy ra $ab=2^{x+y}=2^9$.

BÌNH LUẬN

Nguyên tắc trong bài này là đưa về logarit cơ số 2.

Câu 11: (THTT – 477) Cho $n>1$ là một số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}$ bằng

A. 0. **B.** n. **C.** $n!$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$n>1,n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\frac{1}{\log_4 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\log_{n!}4+...+\log_{n!}n$

$=\log_{n!}(2.3.4...n)=\log_{n!}n!=1$

BÌNH LUẬN

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ \log_a bc=\log_a b+\log_a c,\log_a a=1$$

Sử dụng công thức

Câu 12: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của biểu thức $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy$.

A. $P_{max} = \frac{27}{2}$. **B.** $P_{max} = 18$. **C.** $P_{max} = 27$. **D.** $P_{max} = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $4 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{x+y} \Leftrightarrow x + y \leq 2$.

Suy ra $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$.

Khi đó $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy = 2(x^3 + y^3) + 4x^2y^2 + 10xy$.

$$P = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + (2xy)^2 + 10xy$$
$$\leq 4(4 - 3xy) + 4x^2y^2 + 10xy = 16 + 2x^2y^2 + 2xy(xy - 1) \leq 18$$

Vậy $P_{max} = 18$ khi $x = y = 1$.

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7 - 3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7 + 3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m < \frac{1}{16}$. **B.** $0 \leq m < \frac{1}{16}$. **C.** $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{16}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ m = \frac{1}{16} \end{array}\right.$.

Chọn D.

PT $\Leftrightarrow \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \in (0;1]$. Khi đó PT $\Rightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t - 2t^2 = g(t)$ (1).

Ta có $g'(t) = 1 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = \frac{1}{8} \\ -1 < 2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} < m \le 0 \end{array}\right. .$$

BÌNH LUẬN

Trong bài này các em cần lưu ý tìm điều kiện đúng cho t và mối quan hệ số nghiệm giữa biến cũ và biến mới, tức là mỗi $t \in (0;1)$ cho ta hai giá trị x.

Câu 14: (CHUYÊN ĐHSP HN) Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} = 4$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Chọn D.

Điều kiện $x \ne 0$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \ge 1$, dấu bằng xẩy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \ge 1$,

dấu bằng xẩy ra khi $x = 2$ suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} > 4, \forall x > 0$

- Nếu $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{4x} \ge 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \le -1 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{4x}} \le \frac{1}{2}$, dấu bằng xẩy ra khi $x = -\frac{1}{2}$

và $-\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \ge 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \le -1 \Rightarrow 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} \le \frac{1}{2}$, dấu bằng xẩy ra khi $x = 2$

Suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} < 1, \forall x < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÌNH LUẬN

Sử dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Câu 15: (CHUYÊN ĐH VINH) Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

☑Đáp án: **B.**

ĐK: $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

Đặt $t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$

$\Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t+2)$.

Đặt $\log_3 |t| = \log_5 (t+2) = u$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$$

$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{array}\right..$$

- Xét $(1): 5^u + 3^u = 2$

  Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

  Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

- Xét $(2): \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$

  Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

  Với $u = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

  BÌNH LUẬN

Cho $f(x) = g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 16: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1 - x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x + m - 4) = 0$.

A. $\frac{-1}{4} < m < 0$. **B.** $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$. **C.** $5 < m < \frac{21}{4}$. **D.** $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$.

Chọn C.

$$\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ \log_3(1-x^2)=\log_3(x+m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;1) \\ 1-x^2=x+m-4 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2+x+m-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in\left(-1;1\right)$

Cách 1: Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm thỏa: $-1<x_1<x_2<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(-1\right)>0 \\ a.f\left(1\right)>0 \\ \Delta>0 \\ -1<\dfrac{S}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-5>0 \\ m-3>0 \\ 21-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 5<m<\frac{21}{4}.$$

Cách 2: Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Cách 3: Dùng đồ thị

Đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in\left(-1;1\right)$.

Cách 4: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2+x-5 \Rightarrow f'\left(x\right)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Có $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{21}{4}; f\left(1\right)=-3; f\left(-1\right)=-5$

Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi $-\frac{21}{4}<-m<-5\Rightarrow\frac{21}{4}>m>5$.

Cách 5: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2+x+m-5=0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m=-0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại A, D.**

* Giải khi $m=5$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại B.**

Câu 17: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2};1;-\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left[(x-1)^2+2\right]=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (2)

Xét hàm số $f(t)=2^t.log_2(t+2),t\geq 0.$

Vì $f'(t)>0,\forall t\geq 0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó $(2)\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow(x-1)^2=2|x-m|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+1+2m=0(3)\\x^2=2m-1(4)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)

$\Rightarrow m=\frac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

$(4)\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2m-1}$,với $\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m=1$.

KL: $m\in\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

BÌNH LUẬN

B1: Đưa phương trình về dạng $f(u)=f(v)$ với u,v là hai hàm theo x.

B2: Xét hàm số $f(t),t\in D.$

B3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t),t\in D$ tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trên D.

B4: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Câu 18: (QUẢNG XƯƠNG I) Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0$ có nghiệm đúng $\forall x>0$ là:

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;-\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án B Đặt $2^x=t$. Do $x>0\Rightarrow t>1$.

Khi đó ta có :

$(3m+1)t^2+(2-m)t+1<0,\ \forall t>1\Leftrightarrow(3t^2-t)m<-t^2-2t-1\ \ \forall t>1\Leftrightarrow m<\frac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}\ \ \forall t>1$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}$ *trên* $(1;+\infty)\Rightarrow f'(t)=\frac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2}>0\ \ \forall t\in(1;+\infty)$

BBT

t	1 $+\infty$
f'(t)	+
f(t)	$-\frac{1}{3}$ ↗ -2

Do đó $m\le\lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\begin{array}{l} + \ m \ge f\left(x \right)\forall x \in D \Leftrightarrow m \ge \max f\left(x \right)\forall x \in D \\ + \ m \le f\left(x \right)\forall x \in D \Leftrightarrow m \le \min f\left(x \right)\forall x \in D \end{array}$

Câu 19: (QUẢNG XƯƠNG I) Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** 9.

Chọn đáp án B

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 > 1 \\ 2x+y \ge x^2+2y^2 \end{cases} (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2+2y^2 < 1 \\ 0 < 2x+y \le x^2+2y^2 \end{cases} (II)$.

Xét T= $2x+y$

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0 < T = 2x+y \le x^2+2y^2 < 1$

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2 \le 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \le \frac{9}{8}$. Khi đó

$$2x+y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \le \sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]} + \frac{9}{4} \le \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

Suy ra : $\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;\frac{1}{2})$

BÌNH LUẬN

- Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ nghịch biến nếu $0 < a < 1$

$$\log_a f\left(x \right) > \log_a g\left(x \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ g\left(x \right) > 0 \\ f\left(x \right) > g\left(x \right) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f\left(x \right) > 0 \\ f\left(x \right) < g\left(x \right) \end{cases} \end{array} \right.$$

- Sử dụng bất đẳng thức BCS cho hai bộ số $\left(a;b \right),\left(x;y \right)$ thì $\left| ax+by \right| \le \sqrt{\left(a^2+b^2 \right)\left(x^2+y^2 \right)}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} > 0$

Câu 20: (MINH HỌA L2) Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + \left(3-m \right)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1 \right)$.

A. $\left[3;4 \right]$. **B.** $\left[2;4 \right]$. **C.** $\left(2;4 \right)$. **D.** $\left(3;4 \right)$.

Chọn C.

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0<x<1 \Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1) \Leftrightarrow 2<f(x)<4$ vì $f(0)=2, f(1)=4.$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 21: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)Tìm m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ thoả mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

BPT thoả mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ 5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m \end{cases} (\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ (5-m)x^2-4x+5-m\ge 0 \end{cases} (\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m>0 \\ 16-4m^2<0 \\ 5-m>0 \\ 16-4(5-m)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 3 \\ m\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3.$$

BÌNH LUẬN

Sử dụng dấu tam thức bậc hai không đổi trên R :

+ $f(x)=ax^2+bx+c\ge 0 \forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$

+ $f(x)=ax^2+bx+c>0 \forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

Câu 22: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1\le m<3e^4+1$. **B.** $m\ge 3e^4+1$.

C. $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$. **D.** $m<3e^2+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

• $y' = \left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^{x}+1\right)' =$

$y' = \left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^{x}\right)$

•Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow$

$y' = \left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\dfrac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^{x}\right) \ge 0, \forall x \in (1;2)$ (*), mà $\begin{cases} \left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\dfrac{4}{2017}\right) < 0 \end{cases}$. Nên (*)

$\Leftrightarrow 3e^{3x}-(m-1)e^{x} \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow 3e^{2x}+1 \le m, \forall x \in (1;2)$

•Đặt $g(x) = 3e^{2x}+1, \forall x \in (1;2)$, $g(x) = 3e^{2x}.2 > 0, \forall x \in (1;2)$

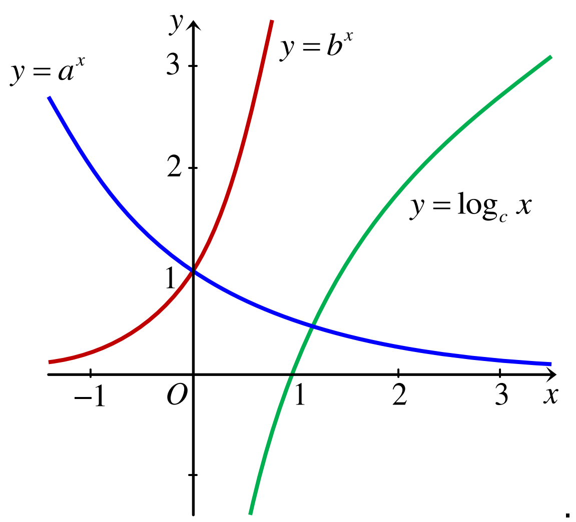
x	1		2
$g'(x)$	|	+	|
$g(x)$	|		|

. Vậy (*) xảy ra khi $m \ge g(2) \Leftrightarrow m \ge 3e^{4}+1$.

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\left(a^{u}\right)' = u'a^{u}\ln a$ và phương pháp hàm số như các bài trên.

Câu 23: (CHUYÊN BẮC GIANG) Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y=a^{x}$, $y=b^{x}$, $y=\log_{c}x$.



.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. $c<a<b.$ **B.** $a<c<b.$ **C.** $b<c<a.$ **D.** $a<b=c.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị

Ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<a<1$.

Hàm số $y=b^x, y=\log_c x$ đồng biến $\Rightarrow b>1, c>1$

$\Rightarrow a<b, a<c$ nên loại A, C

Nếu $b=c$ thì đồ thị hàm số $y=b^x$ và $y=\log_c x$ phải đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y=x$. Nhưng ta thấy đồ thị hàm số $y=\log_c x$ cắt đường $y=x$ nên loại D.

Câu 24: (CHUYÊN BẮC GIANG) Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]}=4.(x-2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Tính $2x_1-x_2$.

A. 1. B. 3. C. -5. D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- Điều kiện $x>2$.
- Phương trình thành $(x-2)^{\log_2 4+\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$
- $\Leftrightarrow (x-2)^2.(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$ hay $(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)$.
- Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được
  $\log_2(x-2).\log_2(x-2)=\log_2[4(x-2)]$

  $\Leftrightarrow \log_2^2(x-2)=2+\log_2(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-2)=-1\\ \log_2(x-2)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=6\end{array}\right.$.
- Suy ra $x_1=\dfrac{5}{2}$ và $x_2=6$. Vậy $2x_1-x_2=2.\dfrac{5}{2}-6=-1$.

Câu 25: (CHUYÊN KHTN L4) Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge \ln(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$

A. $P=6$. B. $P=2\sqrt{2}+3$. C. $P=2+3\sqrt{2}$. D. $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Từ $\ln x+\ln y\ge \ln(x^2+y) \Leftrightarrow xy\ge x^2+y$. Ta xét:

Nếu $0<x\le 1$ thì $y\ge xy\ge x^2+y \Leftrightarrow 0\ge x^2$ mâu thuẫn.

Nếu $x>1$ thì $xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y\left(x-1\right)\ge x^2 \Leftrightarrow y\ge \dfrac{x^2}{x-1}$. Vậy $P=x+y\ge x+\dfrac{x^2}{x-1}$.

Ta có $f\left(x\right)=x+\dfrac{x^2}{x-1}$ xét trên $\left(1;+\infty\right)$.

Có $f'\left(x\right)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(loai) \\ x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}(nhan) \end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} f\left(x\right)=f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+3$.

Câu 26: (CHUYÊN KHTN L4) Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left[2;+\infty\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2^{(x-1)^2}\quad (t\ge 1)$

Phương trình có dạng: $t^2-2mt+3m-2=0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-3m+2}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ \sqrt{m^2-3m+2}<m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ m-1\ge 0 \\ m^2-3m+2<m^2-2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$$

Chọn đáp án: D

BÌNH LUẬN

Trong bài này do đề bài yêu cầu phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên ta cần chú ý mỗi $t\ge 1$ thì ta nhận được bao nhiêu giá trị x

Từ phương trình (*) chúng ta có thể cô lập m và ứng dụng hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình thỏa đề bài.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$?

A. $m\ge 6$. **B.** $m>6$. **C.** $m\le 6$. **D.** $m<6$.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\le \mathrm{m}\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right]\le \mathrm{m}$

Đặt $t=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ do $x\ge 1\Rightarrow t\in[2;+\infty)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t)\ge m\Leftrightarrow t^2+t\ge m\Leftrightarrow f(t)\ge m$

Với $f(t)=t^2+t$

$f'(t)=2t+1>0$ với $t\in[2;+\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t\in[2;+\infty)$

Nên $Minf(t)=f(2)=6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge \mathrm{m}$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$ thì :

$m\le Minf(t)\Leftrightarrow m\le 6$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$.
Đặt $t=\log_2 x$ với $x\ge 32\Rightarrow \log_2 x\ge \log_2 32=5$ hay $t\ge 5$.
Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m(t-3)\quad (*)$.
Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t\ge 5$"
Với $t\ge 5$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)}=m(t-3)\Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0\Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\ge 5\Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\le 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay $1<\dfrac{t+1}{t-3}\le 3\Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\le\sqrt{3}$
suy ra $1<m\le\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1<m\le\sqrt{3}$.
BÌNH LUẬN

Chúng ta có thể dùng hàm số để tìm max, min của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}, t\ge 5$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(2;5]$. **B.** $m\in(-2;5]$. **C.** $m\in[2;5)$. **D.** $m\in[-2;5)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7x^2+7\ge mx^2+4x+m>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2-4x+7-m\ge 0 & (2) \\ mx^2+4x+m>0 & (3) \end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

✓ $m=7$: (2) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

✓ $m=0$: (3) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

(1) thỏa $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m>0 \\ \Delta_2'=4-(7-m)^2\le 0 \\ m>0 \\ \Delta_3'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m\le 5 \\ m>0 \\ m>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 5.$

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2+1)>\log_5(x^2+4x+m)-1\quad(1)$.

A. $m\in[-12;13]$. **B.** $m\in[12;13]$. **C.** $m\in[-13;12]$. **D.** $m\in[-13;-12]$.

Hướng dẫn giải

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1>\dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-x^2-4x=f(x) \\ m<4x^2-4x+5=g(x) \end{cases}$$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x\in(2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \underset{2<x<3}{Max} f(x)=-12 & \text{khi } x=2 \\ m\le \underset{2<x<3}{Min} f(x)=13 & \text{khi } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow -12\le m\le 13.$

Câu 31: Phương trình $2^{x-3}=3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1,x_2 trong đó $x_1<x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1-2x_2=\log_3 8$. **B.** $2x_1-3x_2=\log_3 8$.

C. $2x_1+3x_2=\log_3 54$. **D.** $3x_1+2x_2=\log_3 54$.

Hướng dẫn giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3)\Leftrightarrow \log_2 2^{x-3}=\log_2 3^{x^2-5x+6}$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2=(x^2-5x+6)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3).[1-(x-2)\log_2 3]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 1-(x-2)\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ (x-2)\log_2 3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2=\dfrac{1}{\log_2 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+\log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 18 \end{array}\right.$$

Câu 32: Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3 \quad (7)$

$(7)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\frac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\frac{81}{3^x}=10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)=10^3 \quad (7')$

Đặt $t=3^x+\frac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}}=2$

$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\frac{1}{3^x}+3.3^x.\frac{1}{3^{2x}}+\frac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow 3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$

Khi đó: $(7')\Leftrightarrow 27\left(t^3-3t\right)+81t=10^3 \Leftrightarrow t^3=\frac{10^3}{27}\Leftrightarrow t=\frac{10}{3}>2 \quad (N)$

Với $t=\frac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3} \quad (7'')$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7'')\Leftrightarrow y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \quad (N) \\ y=\frac{1}{3} \quad (N)\end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Với $y=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 33: Phương trình $3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0 \Leftrightarrow \left(3^{2x}-1\right)+2x\left(3^x+1\right)-\left(4.3^x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x+1\right)+(2x-4)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^x+2x-5\right)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow 3^x+2x-5=0$

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x-5$, ta có : $f(1)=0$.

$f'(x)=3^x\ln 3+2>0;\forall x\in ¡$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên ¡ .

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$

BÌNH LUẬN

Có thể đặt $t=3^x>0$ sau đó tính delta theo x

Câu 34: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4}=2^{2\left(x^2+1\right)}+\sqrt{2^{2\left(x^2+2\right)}-2^{x^2+3}+1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}\Leftrightarrow 8.2^{x^2+1}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{4.2^{2(x^2+1)}-4.2^{x^2+1}+1}$

Đặt $t=2^{x^2+1}\,(t\ge 2)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\ge 2$). Từ đó suy ra

$$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ x_2=-\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy tổng hai nghiệm bằng 0.

Câu 35: Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. $-4<m<-1$. B. Không tồn tại m. C. $-1<m<\dfrac{3}{2}$. D. $-1<m<-\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $4^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5}_{f(t)}=0.\ (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1\ne 0 \\ (m+1)f(1)<0 \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1\ne 0 \\ (m+1)(3m+12)<0 \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<m<-1.$$

BÌNH LUẬN

Tìm mối quan hệ nghiệm giữa biến cũ và mới, do $\begin{cases} t=4^x\Leftrightarrow x=\log_4 t \\ 0<t<1\Rightarrow \log_4 t<0 \end{cases}$ nên $0<t_1<1<t_2$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Câu 36: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2m.2^x+2m=0 \qquad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn 2^x có: $\Delta'=(-m)^2-2m=m^2-2m$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2-2m\ge 0 \Leftrightarrow m(m-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0\end{array}\right.$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $2^{x_1}.2^{x_2}=2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m$

Do đó $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^3=2m \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại ta được $m=4$ thỏa mãn.**Chọn A.**

BÌNH LUẬN

Do phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn $2^x>0$ có thể có nghiệm $2^x<0$ (vô lí) nên khi giải ra tham số $m=4$ thì phải thử lại.

Câu 37: **(CHUYÊN VINH – L2)**Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

B. $m\in[1;+\infty)$.

C. $m\in(-4;1)$.

D. $m\in(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó $x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ trở thành $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow mt^2-4t+m+3=0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4-m^2-3m<0 \Leftrightarrow m<-4 \vee m>1$.

Câu 38: **(CHUYÊN VINH – L2)**Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-1<m\ne 0$.

B. $m>-1$.

C. Không tồn tại m.

D. $-1<m<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ne 0\end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}$; $f'(x)=1+\dfrac{2}{(x+1).\ln 3.\log_3^2(x+1)}>0, \forall x\in(-1;0)\cup(0:+\infty)$

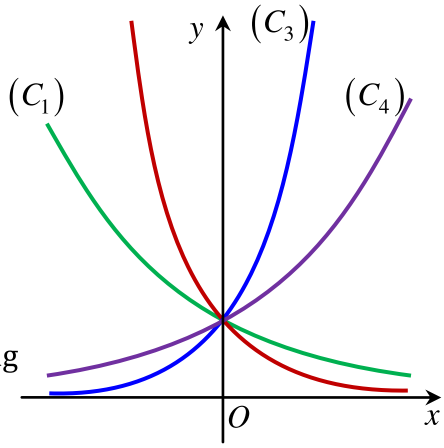
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>-1$

Câu 39: **(TIÊN LÃNG – HP)** Cho bốn hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ (1), $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y=4^x$ (3), $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là 4 đường cong theo phía trên đồ thị, thứ tự từ trái qua phải là $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$ như hình vẽ bên.

Tương ứng hàm số - đồ thị đúng là



A. $(1)-(C_2),(2)-(C_3),(3)-(C_4),(4)-(C_1)$.

B. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.

C. $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$.

D. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ và $y=4^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên hàm đồng biến nên nhận đồ thị là (C_3) hoặc (C_4). Lấy $x=2$ ta có $\left(\sqrt{3}\right)^2<4^2$ nên đồ thị $y=4^x$ là (C_3) và đồ thị $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ là (C_4).

Ta có đồ thị hàm số $y=4^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ đối xứng nhau qua Oy nên đồ thị $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là (C_2).

Còn lại (C_1) là đồ thị của $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Vậy $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$

Câu 40: **(CHUYÊN SƠN LA – L2)** Cho phương trình $4\log_9{}^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\dfrac{2}{9}=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $1<m<2$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $4\log_9{}^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\dfrac{2}{9}=0$ Đk: $x>0$

$$\Leftrightarrow 4\left(\log_{3^2} x\right)^2 + m\log_{3^{-1}} x + \frac{1}{6}\log_{3^{\frac{-1}{2}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - m\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3{}^2 x - \left(m + \frac{1}{3}\right)\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow t^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right)t + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 1$

(Với $t_1 = \log_3 x_1$ và $t_2 = \log_3 x_2$)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (2)

Ta có $t_1 + t_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Vậy $0 < m < \frac{3}{2}$ là mệnh đề đúng.

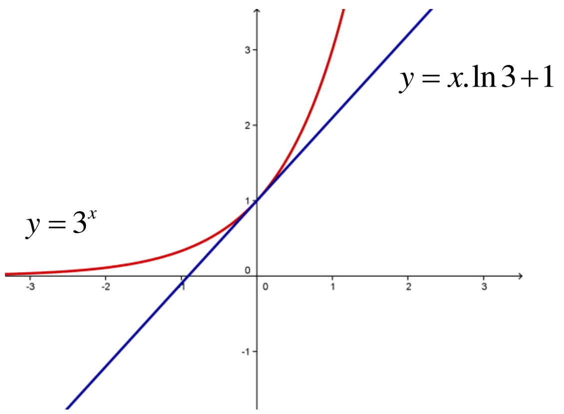
Câu 41: **(CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – L2)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m > 0$. **B.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$. **C.** $m \geq 2$. **D.** Không tồn tại

m **Hướng dẫn giải**

Chọn B

Ta có: Số nghiệm của phương trình $3^x = mx + 1$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = mx + 1$.



Ta thấy $y = mx + 1$ luôn đi qua điểm cố định $(0; 1)$ nên

+Nếu $m = 0$: phương trình có nghiệm duy nhất

+ Nếu $m < 0$: $y = mx + 1$ là hàm nghịch biến nên có đồ thị cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại một điểm duy nhất.

+ Nếu $m > 0$:Để thỏa mãn ycbt thì đường thẳng $y = mx + 1$ phải khác tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $(0; 1)$, tức là $m \neq \ln 3$.

Vậy $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$