CHƯƠNG 05.
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

……………………………………………………………………

Chủ đề 1. Thể tích khối đa diện
- ❖ Thể tích khối chóp
- ❖ Thể tích khối lăng trụ
- ❖ Thể tích khối hộp chữ nhật
- ❖ Thể tích khối lập phương
- ❖ Định lý tỉ số thể tích khối tứ diện hoặc khối chóp tam giác
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Mặt cầu – khối cầu
- ❖ Định nghĩa mặt cầu
- ❖ Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu
- ❖ Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Mặt nón khối nón
- ❖ Định nghĩa mặt nón
- ❖ Hình nón và khối nón
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 4. Mặt trụ - khối trụ
- ❖ Định nghĩa mặt trụ
- ❖ Hình trụ và khối trụ
- ❖ Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 5. Ứng dụng hình học không gian giải các bài toán thực tế
- ❖ Bài tập áp dụng
- ❖ Lời giải chi tiết

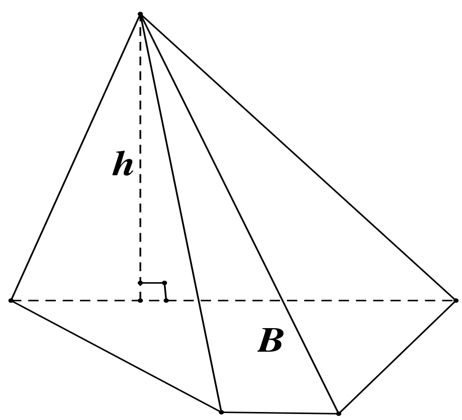
Đề ôn tập chương 5
Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 05.
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
CHỦ ĐỀ 1.
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Trước khi vào phần bài tập bạn đọc cần trang bị cho mình các kiến thức căn bản tối thiểu:

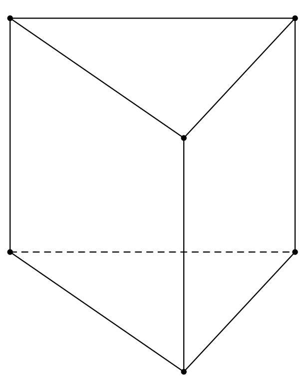
1. Thể tích khối chóp

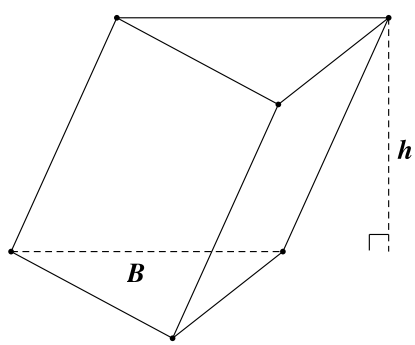
Công thức tính: $V = \frac{1}{3}B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.



2. Thể tích khối lăng trụ

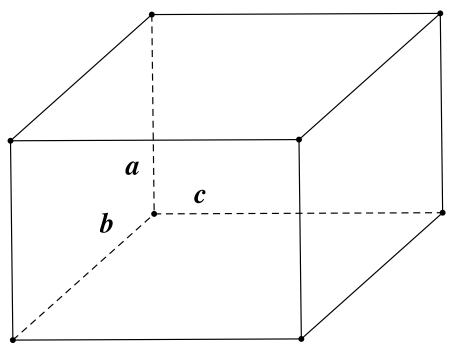
$V = B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ.





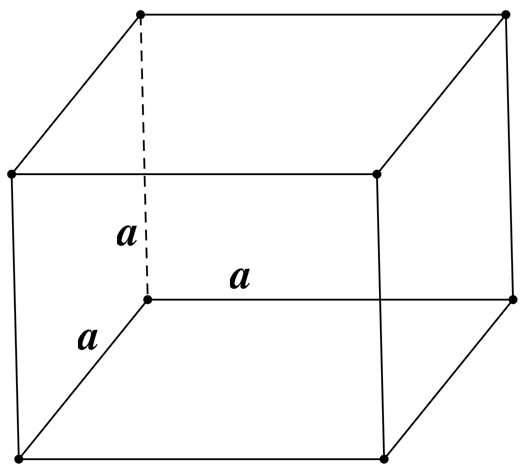
3. Thể tích khối hộp chữ nhật

$V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước.

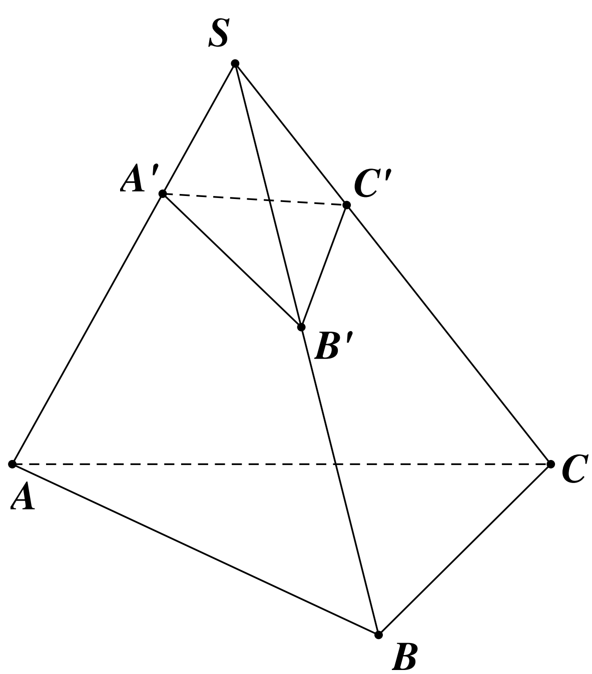


4 . Thể tích khối lập phương

$V = a^3$ với a là độ dài cạnh.



5 . Định lý tỉ số thể tích khối tứ diện hoặc khối chóp tam giác



Cho khối tứ diện $SABC$ và A',B',C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA,SB,SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$

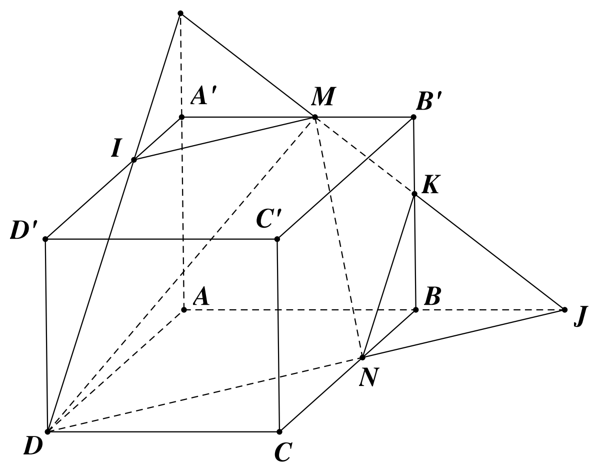
Chúng ta sẽ cùng đi ngay vào các ví dụ minh họa để thấy rằng có những bài liên quan đến thể tích khối đa diện rất khó, đòi hỏi khả năng vận dụng cao.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh $A,(H')$ là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A . $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{37}{48}$ **B.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{55}{89}$ **C.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\dfrac{1}{2}$

Lời giải



$AN\cap ND=J, JM\cap BB'=K$. Ta có: $BK=2B'K; I\in A'D'$.

Ta có: $A'I=\dfrac{1}{4}D'D'$. Suy ra thiết diện là $KMIDN$

$V_{(H)}=V_{ABA'KMIDN}=V_{D.ABKMA'}+V_{D.BKN}+V_{D.MA'I}$

$=\dfrac{1}{3}a.\left(a^2-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{1}{3}a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{2a}{3}+\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{4}=\dfrac{55a^3}{144}$

$\Rightarrow V_{(H')}=a^3-\dfrac{55a^3}{144}=\dfrac{89a^3}{144}\Rightarrow\dfrac{V_H}{V_{H'}}=\dfrac{55}{89}.$

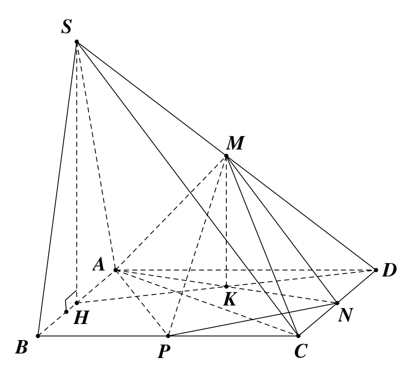
Chọn B.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD,CD,BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x,y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A . $x^2+2xy-y^2>160$ **B.** $x^2-2xy+2y^2<109$

C. $x^2+xy-y^4<145$ **D.** $x^2-xy+y^4>125$

Lời giải



+ Gọi H là trung điểm AB.

Do ΔABC đều và $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Xét ΔABC đều: $SH=\dfrac{\sqrt{3}AB}{2}=2\sqrt{3}$

+ Ta có: $S_{ABPN}=S_{ABCD}-S_{ADN}-S_{CND}$

$=AB^2-\frac{AD.DN}{2}-\frac{CN.CP}{2}=4^2-\frac{4.2}{2}-\frac{2.2}{2}=10$

$\Rightarrow V_{S.ABPN}=\frac{1}{3}.S_{ABPN}.SH=\frac{1}{3}.10.2\sqrt{3}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

+ Gọi $AN\cap HD=\{K\}$ ta có MK là đường trung bình của ΔDHS

$\Rightarrow HK=\frac{1}{2}SH\Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{3}.S_{CNP}.MK=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CN.CP.\frac{1}{2}.SH=\frac{1}{3}.\frac{2.2}{2}.\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Thay vào các đáp án.

Chọn C.

Bài 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SC=a, \widehat{SCA}=\varphi.$ Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

A . $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$

C. $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$

D. $\varphi=3\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

$BC=AC=a.\cos\varphi; SA=a.\sin\varphi$

$V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{6}.AC.BC.SA=\frac{1}{6}a^3\sin\varphi.\cos^2\varphi$

$=\frac{1}{6}a^3\sin\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)$

Xét hàm số: $f(x)=x-x^3$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có: $f'(x)=1-3x^2, f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Từ đó ta thấy trên khoảng $(0;1)$ hàm số $f(x)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt $GTLN$ hay:

$\max\limits_{x\in(0;1)}f(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ hay $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\left(\forall 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$

Chọn A.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC=SD=a\sqrt{3}.$ Tính thể tích khối chóp $S.ABCD.$

A . $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

B. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

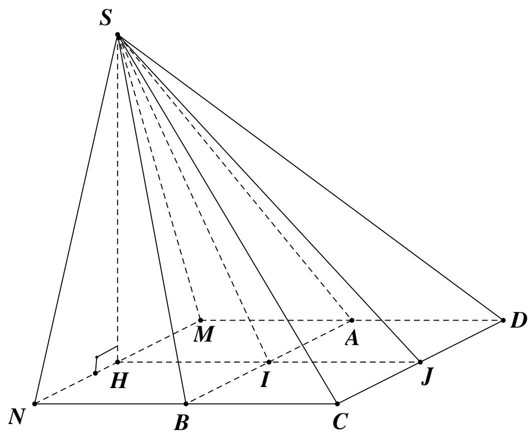
C. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $V=\frac{a^3}{6}$

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB;J là trung điểm của CD từ giả thiết ta có:

$IJ=a; SI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SJ=\sqrt{SC^2-JC^2}=\sqrt{3a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$



Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có:

$$\cos\left(SIJ\right)=\frac{IJ^2+IS^2-SJ^2}{2.IJ.IS}=\frac{a^2+\frac{3a^2}{4}-\frac{11a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=-\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}<0$$

Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có SIJ tù. Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S. Gọi H là hình chiếu của S trên $\left(ABCD\right)$, ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $H=90^0$.

Góc I nhọn và $\cos\hat{I}=\cos SIH=-\cos SIJ=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(SIJ\ va\ SIH\ ke\ bu\right)\Rightarrow \sin SIH=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác SHI ta có $SH=SI.\sin SIH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn C.

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với $\left(SBC\right)$, góc giữa $\left(P\right)$ với mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A . $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{8}$

Lời giải

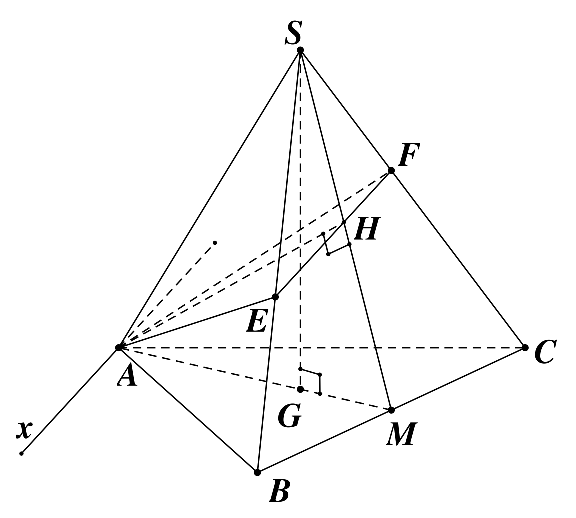
Tổng quát: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua A và song song BC và vuông góc với $\left(SBC\right)$, góc giữa $\left(P\right)$ với mặt phẳng đáy là α

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{a^3\cot\alpha}{24}$

Áp dụng bài này: $V_{S.ABC}=\frac{a^3\cot 30^0}{24}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi G là trọng tâm



+ Gọi $(P)\cap(SBC)$=EF$\Rightarrow$ EF//BC$\Rightarrow(P)\cap(SBC)$=Ax với $Ax//EF//BC$

+ Gọi M là trung điểm $BC, SM\cap EF=N$.

Ta có: $AM\perp BC, SG\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow AN\perp BC\Rightarrow AN\perp Ax$

Mà A$M\perp BC, BC//Ax\Rightarrow AM\perp$ Ax$\Rightarrow((P),(ABC))=NAM=30^0$

Ta có: $GSM=NAM=\alpha$ (cùng phụ với SMA)

Xét ΔSGM vuông tại G có: $SG=GM.\cot GSM=\frac{1}{3}AM.\cot 30^0=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$

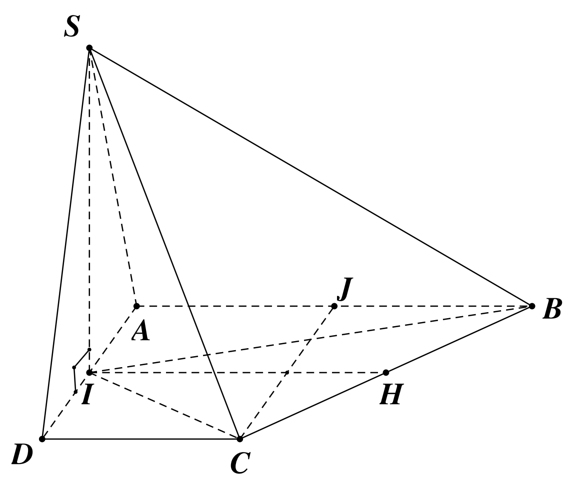
Vậy: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn A.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD,$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A,D; AB=AD=2a, CD=a.$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của $AD,$ biết hai mặt phẳng $(SBI),(SCI)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD).$ Tính thể tích khối chóp $S.ABCD.$

A . $\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ **B.** $\frac{3\sqrt{17}}{5}a^3$ **C.** $\frac{3\sqrt{19}}{5}a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{23}}{5}a^3$

Lời giải



Gọi H trung điểm của BC, I là hình chiếu của H lên BC, J là trung điểm $AB.$

Ta có $SI\perp mp(ABCD), IC=\sqrt{ID^2+DC^2}=a\sqrt{2}$

$IB=\sqrt{IA^2+AB^2}=a\sqrt{5}$ và $BC=IB=\sqrt{CJ^2+JB^2}=a\sqrt{5}$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AD(AB+CD)=3a^2$; $S_{IAB}=\frac{1}{2}.IA.AB=a^2$ và $S_{CID}=\frac{1}{2}.DC.DI=\frac{1}{2}a^2$

$\Rightarrow S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{IAB}-S_{DIC}=\frac{3a^2}{2}.$

Mặt khác $S_{IBC}=\frac{1}{2}IH.BC,$ nên $IH=\frac{2S_{IBC}}{BC}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a.$

$SI=IH.\tan 60^0\frac{9\sqrt{3}}{5}a.$

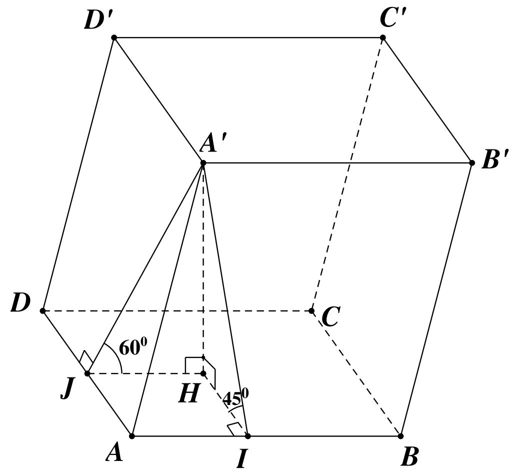
Do đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3.$

Chọn A.

Bài 7: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1.; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA=\sqrt{3}, AD=\sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45^0;60^0$. Thể tích khối hộp là:

A . 4 (đvdt) **B .** 3 (đvdt) **C**. 2 (đvdt) **D**. 6 (đvdt)

Lời giải



Dựng $A'H \perp (ABCD)$ và $A'I \perp AB, A'J \perp AD \Rightarrow HI \perp AB, HJ \perp AD.$

Ta có $A'IH = 45^0$; $A'JH = 60^0.$

Đặt $A'H = h.$

Tam giác $HA'J$ vuông có $A'JH = 60^0$ nên là nửa tam giác đều có cạnh $A'J$, đường cao $A'H, HJ$ là nửa cạnh $\Rightarrow A'J = \dfrac{h}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - A'J^2 = 1 - \dfrac{12h^2}{9} = \dfrac{9-12h^2}{9}$

$\Rightarrow \text{AJ} = \dfrac{\sqrt{9-12h^2}}{3}$ với $0 < h < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Tam giác $HA'I$ vuông cân tại $H \Rightarrow IH = A'H = h$

AIHJ là hình chữ nhật.

$AJ = IH \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{9-12h^2}}{3} = h \Leftrightarrow 9-12h^2 = 9h^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D': V = S_{ABCD}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{7}.\dfrac{3}{\sqrt{21}} = 3$ (đvdt)

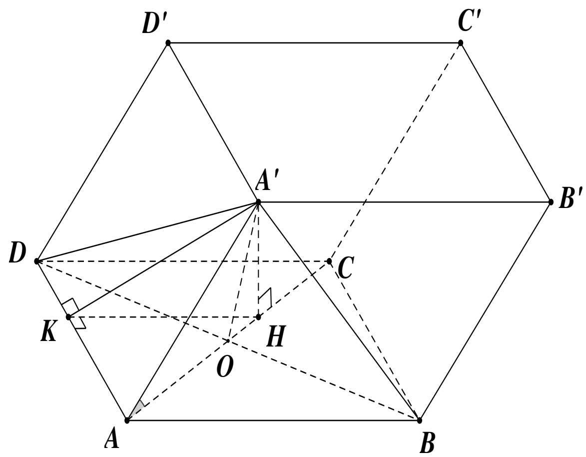
Chọn B.

Bài 8: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BDA, A'AD$ đều bằng $\alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Tính thể tích V của khối hộp.

A . $V = a^3 \sin 2\alpha \sqrt{\cos^2 \dfrac{a}{2} - \cos^2\alpha} \arcsin\theta$ **B.** $V = 2a^3 \sin\alpha \sqrt{\cos^2 \dfrac{a}{2} - \cos^2\alpha}$

C. $V = 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \dfrac{a}{2} - \cos^2\alpha}$ **D**.Đáp số khác.

Lời giải



Dựng $A'H \perp AC; A'K \perp AD \Rightarrow \Delta A'BD$ cân tại $A' \Rightarrow A'O \perp BD$

Ta có $\begin{cases} A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (ABCD) \Rightarrow HK \perp AD$

Đặt $A'AO = \beta . \Delta HAA'$ vuông tại $H \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{AH}{AA'}$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC$ là phân giác góc $BAD = \alpha, \Delta KAH$ vuông tại K

$\Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AK}{AH} \Rightarrow \cos\beta . \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AH}{AA'} . \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AK}{AA'} = \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \Rightarrow A'H = AA'.\sin\beta = a.\sin\beta \Rightarrow A'H = a\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

Do đó ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = a^2.\sin\alpha . \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

$= 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{a}{2} - \cos^2\alpha}.$

Chọn C.

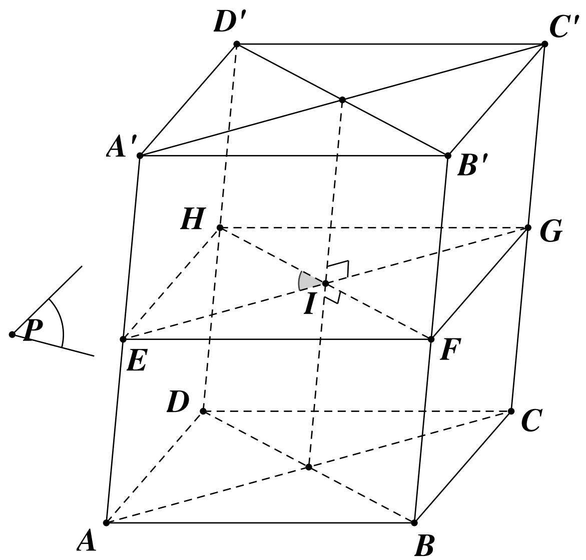
Bài 9: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A . $V = \dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{a}$ **B.** $V = \dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{3a}$. $V = \dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{4a}$ **D.** $V = \dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{2a}$

Lời giải

Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có giao tuyến là OO', có diện tích theo thứ tự S_1, S_2.



Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với OO' tại I, cắt các cạnh bên $\mathrm{AA}', BB', CC', \mathrm{DD}'$ theo thứ tự tại E, F, G, H ($(P) \perp$ các cạnh bên).

Ta có: $EG, HF \perp \mathrm{OO}'$ tại $I \Rightarrow EIH = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng chéo $(ACC'A')$ và $(B\mathrm{DD}'B')$.

- $\mathrm{EF}GH$ là một thiết diện thẳng của hình hộp và là một hình bình hành.

Do đó , ta có thể tích V của hình hộp là:

$V = S_{EFGH}.AA' = \frac{1}{2}.EG.HF.AA'.\sin\alpha$

Ta lại có: $S_1 = S_{ACC'A'} = EG.\mathrm{AA}' \Leftrightarrow \mathrm{EG} = \frac{S_1}{a}$; $S_2 = S_{B\mathrm{DD}'B'} = HF.BB' \Leftrightarrow HF = \frac{S_2}{a}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{2}.\frac{S_1}{a}.\frac{S_2}{a}a.\sin\alpha = \frac{S_1S_2\cos\alpha}{2a}$.

Chọn D.

Bài 10: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, BAD = \alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β. Tính thể tích khối hộp đứng đã cho là:

A . $V = 4ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

B. $V = 2ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\cos\alpha.\cos\beta$

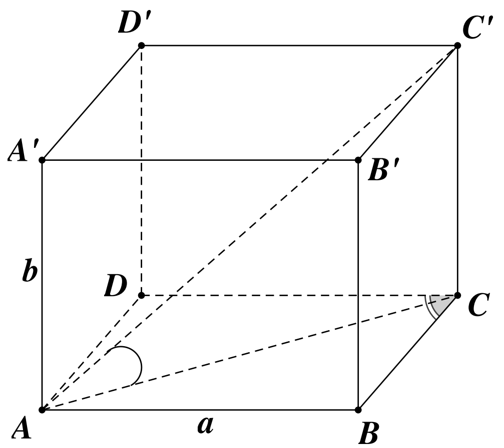
C. $V = 3ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

D. $V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Lời giải

$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Ta có: $CC' \perp (ABCD)$



$\Rightarrow CAC' = \beta$ là góc của AC' và mặt đáy $(ABCD)$.

Xét ΔABC , ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos ABC$

$= a^2 + b^2 + 2ab.\cos\left(180^0 - \alpha\right) = a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha.$

$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}$

Do đó ta có: $CC' = AC.\tan\beta = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\tan\beta$.

Thể tích của hình hộp đứng: $V = S_{ABCD}.CC' = ab\sin\alpha.\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\tan\beta$

$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha.\tan\beta$

Chọn D.

CHỦ ĐỀ 2.
MẶT CẦU – KHỐI CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu

1) **Định nghĩa:** Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$.

Như vậy, khối cầu $S(O;R)$ là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R.$

2) **Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu**

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2.$
- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3.$

3) **Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$**

Để tìm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp bất kì ta cần phải tìm được điểm I cách đều tất cả các đỉnh.

Bước 1: Dựng trục của đáy: là đường thẳng đi qua tâm của đáy và vuông góc với đáy.

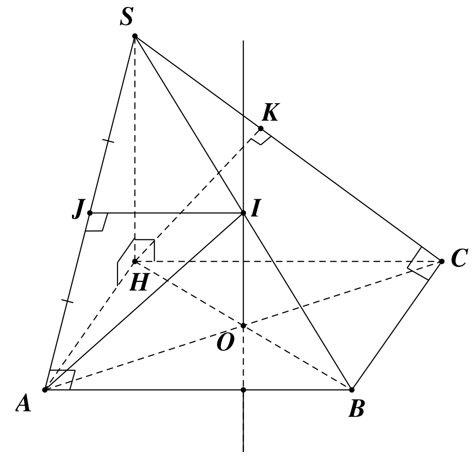
Bước 2: Ta thường dựng trung trực của một cạnh bên nào đó cắt trục của đáy tại I, hoặc dựng trục của một mặt bên nào đó cắt trục của đáy tại I. Tâm mặt cầu chính là điểm I, ở bước 2 này phải tùy vào đề bài mà ta có cách xử lý cụ thể.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90^0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A . $S = 2\pi a^2$ **B.** $S = 8\pi a^2$ **C.** $S = 16\pi a^2$ **D.** $S = 12\pi a^2$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)

Ta có $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$

Tương tự , $AH \perp AB$

Và ΔABC vuông cân tại B nên ABCH là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BH, O$ là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại I, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.SBC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$)

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$ tam giác SHC vuông tại $H \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$

Tam giác SHA vuông tại $H \Rightarrow SA = 3a$

$JA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2.$

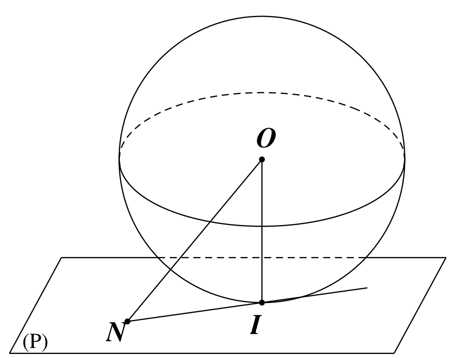
Chọn D.

Bài 2: Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến O bằng R. Một điểm M tùy ý thuộc (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N. Hình chiếu của O trên (P) là I. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A . NI tiếp xúc với (S) **B.** $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$

C. Cả A và B đều sai. **D.** Cả A và B đều đúng.

Lời giải



Vì I là hình chiếu của O lên (P) nên $d[O,(P)] = OI$ mà $d[O,(P)] = R$ nên I là tiếp điểm của (P) và (S).

Đường thẳng OM cắt (P) tại N nên IN Vuông góc với OI tại I.

Suy ra IN tiếp xúc với (S).

Chọn A.

Bài 3: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\dfrac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A . $\sqrt{\dfrac{p}{\pi}}$ **B.** $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$ **C.** $\sqrt{\dfrac{2p}{\pi}}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}$

Lời giải

Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính R.

Theo giả thiết , ta có, $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\dfrac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2 = \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}$

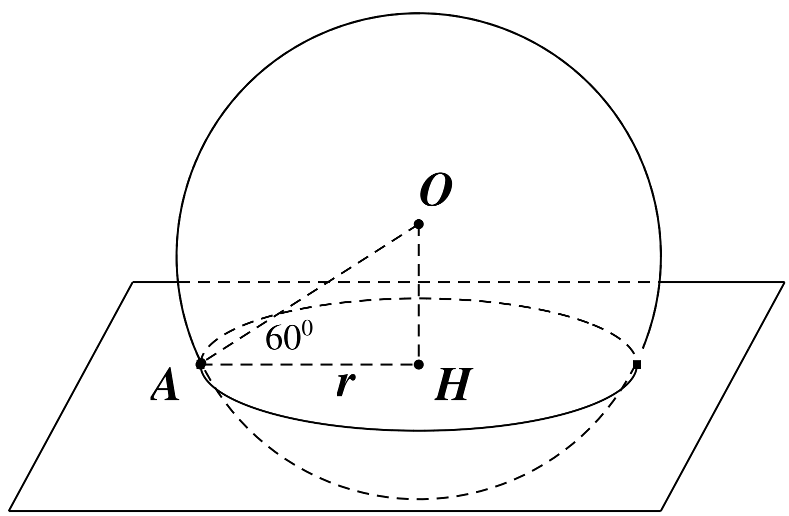
Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}.$

Chọn D.

Bài 4: Cho mặt cầu $S(O;R), A$ là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng 60^0. Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

A . πR^2 **B.** $\dfrac{\pi R^2}{2}$ **C.** $\dfrac{\pi R^2}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi R^2}{8}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) thì:

- H là tâm của đường tròn giao tuyến (P) và (S).
- $(OA,(P)) = (OA, AH) = 60^0.$

Bán kính của đường tròn giao tuyến : $r = HA = OA.\cos 60^0 = \dfrac{R}{2}.$

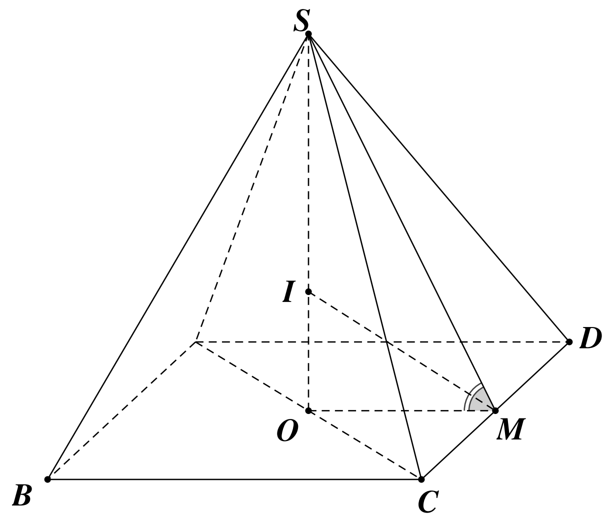
Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến : $\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2}{4}.$

Chọn C.

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

A . $\dfrac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ **C.** $\dfrac{a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$ **D.** $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân giác trong của góc $SMH\left(I\in SH\right)$. Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $IH=r$.

Ta có: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH=\dfrac{a}{2}$.

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH}=\frac{MS}{MH}\Rightarrow\frac{SH}{IH}=\frac{MS+MH}{MH}\Rightarrow IH=\frac{SH.MH}{MS+MH}=\frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Chọn B.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA=BC=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A . $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $3a$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $a\sqrt{6}$

Lời giải

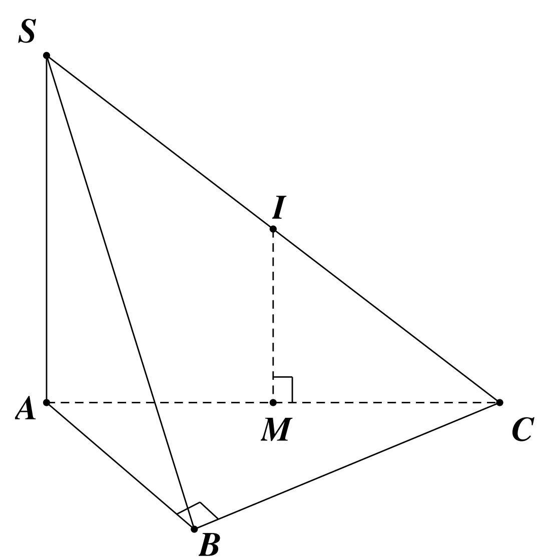
Gọi M là trung điểm AC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là trung điểm 2SC, suy ra $IM//SA$ nên $IM\perp\left(ABC\right)$.

Do đó IM là trục của ΔABC , suy ra $IA=IB=IC$ (1)

Hơn nữa , tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên $IS=IC=IA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $IS=IA=IB=IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Vậy bán kính $R=IS=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

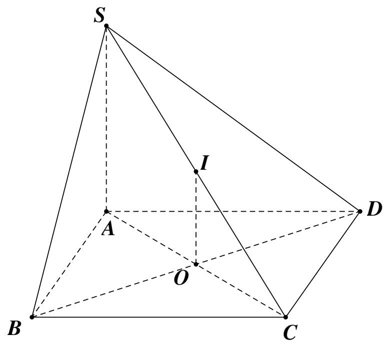


Chọn C.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $\left(ABCD\right)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ta được:

A . $a^2\sqrt{2}$ **B.** $8\pi a^2$ **C.** $2a^2$ **D.** $2\pi a^2$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD,$ suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra $IO // SA \Rightarrow IO \perp (ABCD).$

Do đó IO là trục của hình vuông ABCD, suy ra: $IA = IB = IC = ID \quad (1)$

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC nên $IS = IC = IA \quad (2)$

Từ (1) và (2) , ta có: $R = IA = IB = IC = ID = \text{IS} = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt).

Chọn B.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a.$ Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A . $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

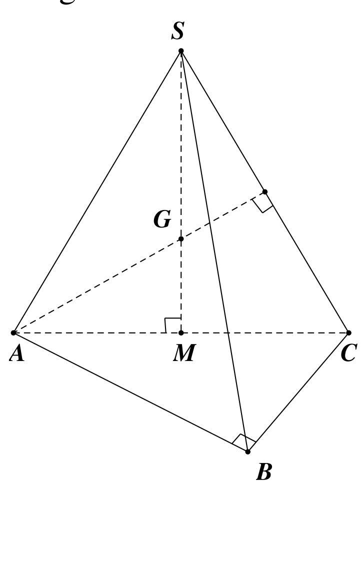
Gọi M trung điểm AC, suy ra $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$

Tam giác SAC có SM là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác SAC cân tại S.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2},$ suy ra tam giác SAC đều.

Gọi G trọng tâm tam giác SAC, suy ra $GS = GA = GC \quad (1)$

Tam giác ABC vuông tại B, có M là trung điểm cạnh huyền AC nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Lại có $SM \perp (ABC)$ nên SM là trục của tam giác ABC.

Mà G thuộc SM nên suy ra $GA = GB = GC \quad (2)$

Từ $(1),(2)$, suy ra $GS = GA = GB = GC$ hay G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu $R = GS = \frac{2}{3}SM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn B.

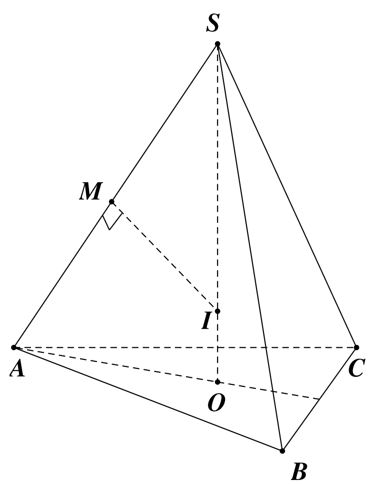
Bài 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\frac{R}{h}$ bằng:

A . $\frac{7}{12}$ **B.** $\frac{7}{24}$ **C.** $\frac{7}{6}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Gọi O là tâm ΔABC, suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong SOA, ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$.



Trong mặt phẳng (SOA), kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I, suy ra:

- $I \in d$ nên $IS = IA$
- $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Gọi M là trung điểm SA, ta có ΔSOA đồng dạng ΔSMI nên $R = SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}$

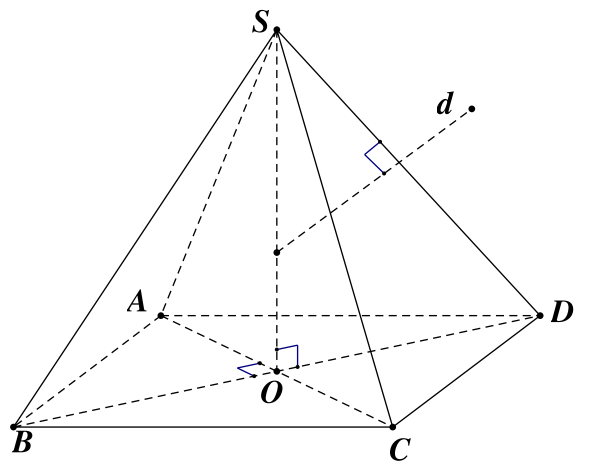
Vậy $\frac{R}{h} = \frac{7}{6}$.

Chọn C.

Bài 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

A . $\frac{4\pi a^3}{3}$ **B.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **D.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $60^0 = SB,(ABCD) = SB,OB = SBO.$ Trong $\Delta SOB,$ ta có $SO = OB.\tan SBO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Ta có SO là trục của hình vuông ABCD.

Trong mặt phẳng $(SOB),$ kẻ đường trung trực d của đoạn SB.

Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ \text{IS=IB} \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = \text{IS=R}$

Xét ΔSBD có $\begin{cases} SB = SD \\ SBD = SBO = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Do đó, d cũng là đường trung tuyến của ΔSBD. Suy ra I là trọng tâm $\Delta SBD.$

Bán kính mặt cầu $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}.$

Chọn D.

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang cân , đáy lớn $AD = 2a,$ $AB = BC = CD = a.$Cạnh bên $SA = 2a,$ và vuông góc với đáy. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

A . $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.**1 **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

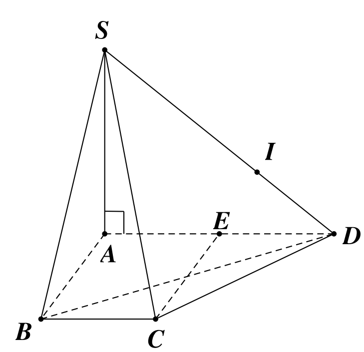
Ta có $SA \perp AD$ hay $SAD = 90^0.$

Gọi E là trung điểm $AD.$

Ta có $EA = AB = BC.$ Nên ABCE là hình thoi. Suy ra $CE = EA = \frac{1}{2}AD.$

Do đó tam giác ACD vuông tại C.

Ta có:



$\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC$

hay $SCD = 90^0$.

Tương tự, ta cũng có $SB \perp BD$ hay $SAD = 90^0$.

Ta có $SAD = SCD = SBD = 90^0$ nên khối chóp $S.ABCD$ nhận trung điểm I của SD làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính $R = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

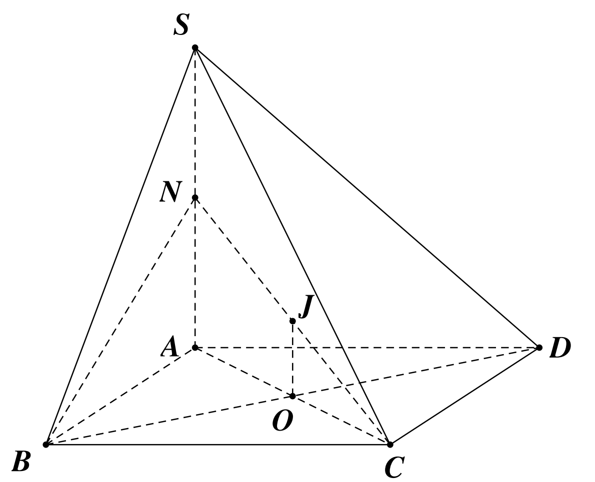
Suy ra $\frac{R}{a} = \sqrt{2}$.

Chọn D.

Bài 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng 45^0. Gọi N là trung điểm SA, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

A . $4R = \sqrt{5}h$ **B.** $\sqrt{5}R = 4h$ **C.** $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h$ **D.** $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}h$

Lời giải



Ta có $45^0 = (SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA$.

Trong ΔSAC, ta có $h = SA = a\sqrt{5}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BN \perp BC$.

Lại có $NA \perp AC$. Do đó, hai điểm A, B cùng nhìn đoạn NC dưới một góc vuông nên hình chóp $N.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm J là trung điểm NC, bán kính:

$R = IN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}$.

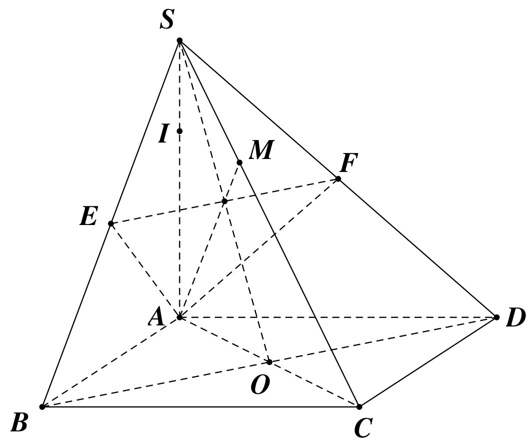
Chọn A.

Bài 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A . $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Lời giải

Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên $EF//BD.\Delta SAC$ cân tại A, trung tuyến AM nên $AM \perp SC$ (1)



Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Do đó $EF \perp SC$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE$ $(*)$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ $(**)$

Từ $(*),(**)$ suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB.$

Tương tự ta cũng có $AF \perp SD$. Do đó $SEA = SMA = SFA = 90^0$ nên 5 điểm S, A, E, M, F cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA, bán kính $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a.Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

A . $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD.$

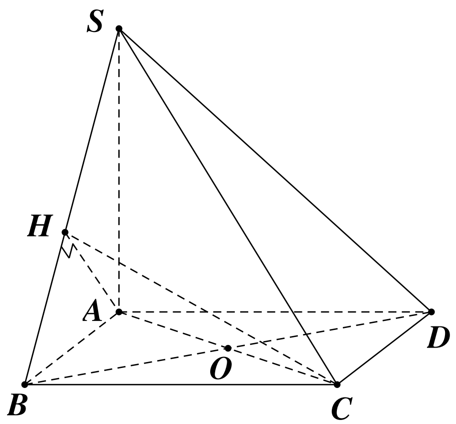
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB = OD = OC$ (1)

Ta có

$\begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SBA) \Rightarrow CB \perp AH.$

Lại có $AH \perp SB$. Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H

và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH = OC$ (2)



Từ $(1),(2) \Rightarrow R = OH = OB = OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.

Bài 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

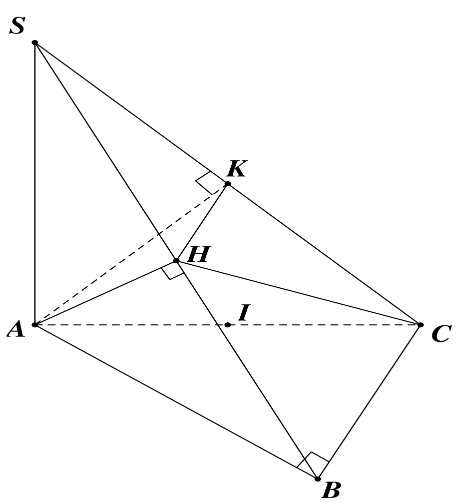
A . $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ **B.** $\sqrt{2}\pi a^3$ **C.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $ABC = 90^0, AKC = 90^0 \quad (1)$

Do $\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \ \left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp HC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy r aba điểm B, H, K cùng nhìn xuống AC dưới một góc 90^0 nên hình chóp $A.HKCB$ nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC, bán kính $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vậy thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvdt).

Chọn A.

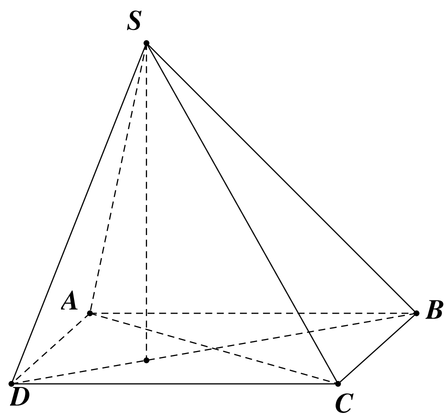
Bài 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $BD = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm OD. Đường thẳng SD tạo với mặt đáy 1 góc bằng 60^0. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nhận giá trị nào sau đây?

A . $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** a

Lời giải

Ta có $60^0 = \left(SD,\left(ABCD\right)\right) = \left(SD,HD\right) = SDH$.

Trong tam giác vuông SDH, có $SH = \frac{BD}{4}\tan SDH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, và $SD = \frac{HD}{\cos SDH} = \frac{a}{2}$



Trong tam giác vuông SHB, có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SBD, ta có $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$.

Suy ra tam giác SBD vuông tại S. Vậy các đỉnh S, A, C cùng nhìn xuống BD dưới 1 góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là O bán kính $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

Chọn C.

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng $\left(SAB\right)$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A . $R = d\left[G,\left(SAB\right)\right]$ **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH$ **C.** $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$ **D.** $\frac{R}{a} = \sqrt{3}$

Lời giải

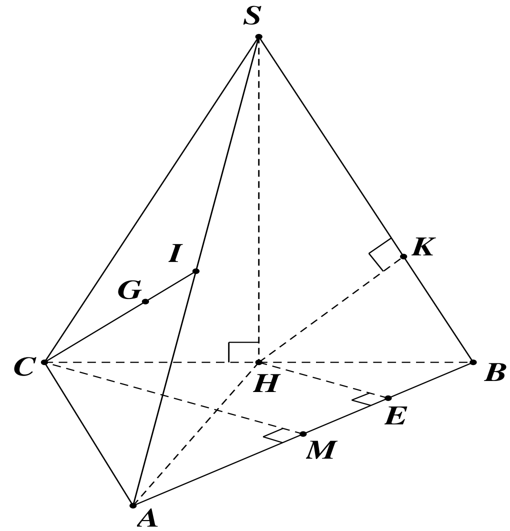
Ta có $60^0 = \left(SA,\left(ABC\right)\right) = \left(SA,HA\right) = SAH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có

$SH = AH.\tan SAH = \frac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với $\left(SAB\right)$ nên bán kính mặt cầu $R = d\left[G,\left(SAB\right)\right]$



Ta có $d\left[G,(SAB)\right]=\frac{1}{3}d\left[C,(SAB)\right]=\frac{2}{3}d\left[H,(SAB)\right]$. Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB, MB.

Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SE, suy ra $HK \perp SE$ (1)

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow HK \perp (SAB), d\left[H,(SAB)\right]=HK.$

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{3a}{2\sqrt{13}}$. Vậy $R=\frac{2}{3}HK=\frac{a}{\sqrt{13}}$.

Chọn D.

Bài 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là?

A . $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ **B.** $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$ **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD.$

Suy ra $OA = OB = OC = OD$ (1)

Gọi M trung điểm AB, do tam giác SAB vuông tại S nên $MS = MA = MB.$

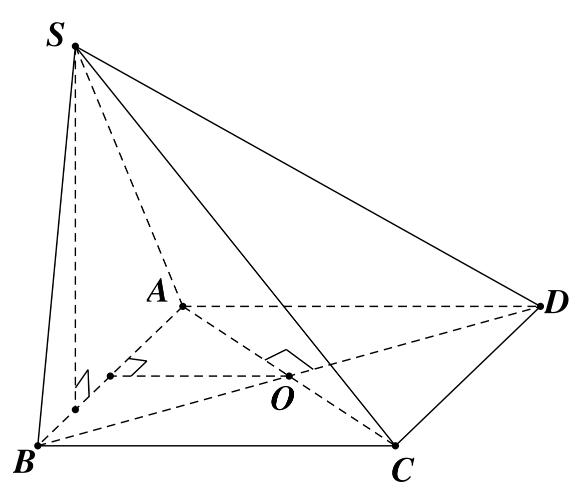
Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

Từ giả thiết suy ra: $SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$

Nên OM là trục của tam giác SAB,

suy ra $OA = OB = \text{OS}$ (2).



Từ $(1),(2)$ ta có $OS = OA = OC = OD.$

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD,$ bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvdt).

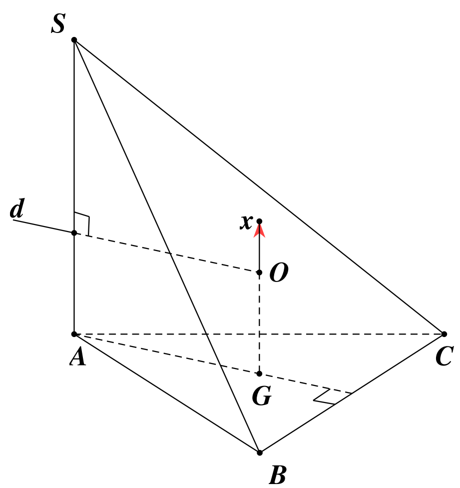
Chọn A.

Bài 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh $a.$ Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABC). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A . $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{4}$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tamm giác $ABC.$ Từ G dựng tia $Gx \perp (ABC)$ (như hình vẽ). Suy ra Gx là trục của tam giác ABC. TRong mặt phẳng $(SA, Gx),$ kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA.



Gọi $O = Gx \cap d \Rightarrow \begin{cases} O \in Gx \\ O \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OA = \text{OS} \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = \text{OS} = R$

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC.$

Ta có $OG = PA = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông $OGA,$ ta có $R = OA = \sqrt{OG^2 + AG^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$

Chọn C.

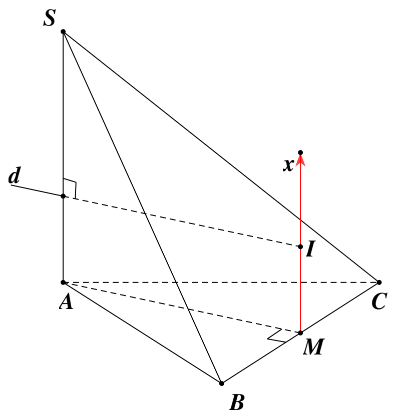
Bài 20: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh AS, AB, AC đôi một vuông góc và $\text{AS} = a, AB = 2a, AC = 3a.$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là:

A . $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC.$

Kẻ $Mx \perp (ABC)$ (như hình vẽ).



Suy ra Mx là trục của ΔABC. Trong mặt phẳng (SA,Mx) kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Mx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

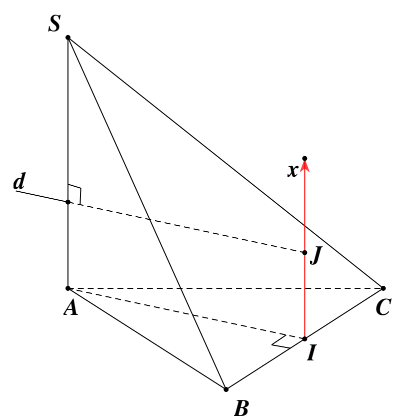
Bán kính mặt cầu: $R=IA=\sqrt{IM^2+AM^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn D.

Bài 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=AC=a$. Cạnh bên SA vuông với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với đáy (ABC) một góc 60^0. Gọi S, V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V}{S}$ bằng?

A . $a\sqrt{14}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{14}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

Lời giải



Ta có: $60^0=(SI,(ABC))=(SI,AI)=SIA.$

Tam giác ABC vuông cân tại A,

suy ra $AI=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSIA, ta có: $SA=AI.\tan SIA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Kẻ Ix $\perp(ABC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Ix là trục của $\Delta ABC.$

Trong mặt phẳng (SA,Ix), kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Ix tại J. Khi đó, J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

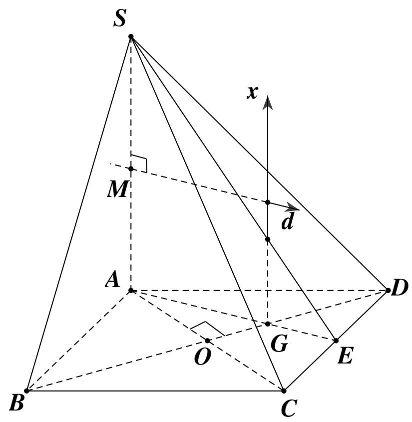
Bán kính: $R=JA=\sqrt{JI^2+AI^2}=\dfrac{a\sqrt{4}}{4}$ nên $\dfrac{V}{S}=\dfrac{R}{3}=\dfrac{a\sqrt{14}}{12}$.

Chọn B.

Bài 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thoi cạnh $a,$ góc $BAD=120^0$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ACD$ nhận giá trị:

A . $\dfrac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$ **B.** $\dfrac{2a}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác đều ACD. Kẻ $Gx \perp (ACD)$, suy ra Gx là trục của ΔACD. Trong mặt phẳng (SA, Gx), kẻ trung trực d của đoạn SA cắt Gx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta có $IG = MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; GA = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

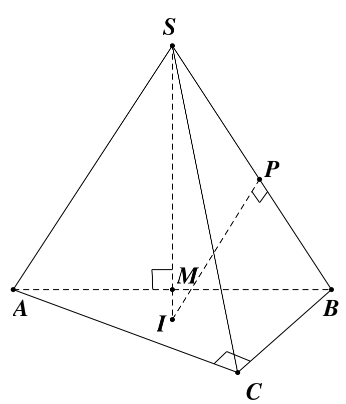
Suy ra bán kính: $R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

Chọn A.

Bài 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC = a$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, $SA = SB = a, \mathrm{ASB} = 120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A . $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** a **D.** $2a$

Lời giải



Gọi M trung điểm AB, suy ra $SM \perp AB$ và $SM \perp (ABC)$.

Do đó, SM là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SBM), kẻ đường trung trực d của đoạn SB cắt SM tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = SI$.

Ta có: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos \mathrm{ASB}} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SMB ta có $SM = SB.\cos MSB = a.\cos 60^0 = \frac{a}{2}$

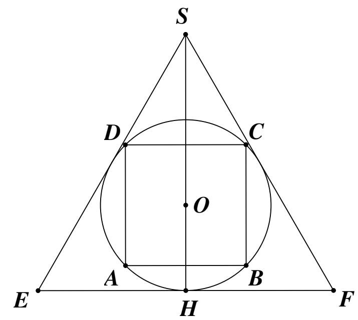
Ta có $\Delta SPI \sim \Delta SMB.$ Suy ra $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SP}{SI}\Rightarrow R=SI=\dfrac{SB.SP}{SM}=a.$

Chọn C.

Bài 24: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng 60^0. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (N) và hình nón (T).

A . $\dfrac{V_T}{V_N}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\dfrac{V_T}{V_N}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{V_T}{V_N}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}$ **D.** Chọn khác

Lời giải



Bài quy về hình nón tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD và nội tiếp tam giác đều SEF mà $EF//AB.$

Vì OAB là tam giác vuông cân nên: $OA=BC=R\sqrt{2}.$

Suy ra $V_T=\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2BC=\dfrac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$

Ta thấy, tâm O cũng hình tròn cũng chính là tâm của hình vuông ABCD đồng thời cũng là trọng tâm của tam giác đều SEF.

Như vậy, đường cao của tam giác SEF là $SH=3OH=3R.$

Trong tam giác EOH (vuông tại H, $EOH=30^0$).

Ta có: $EH=OH.\sqrt{3}=R\sqrt{3}$

Thể tích của hình nón: $V_H=\dfrac{1}{3}\pi EH^2.SH=\dfrac{1}{3}\pi.3R^2.3R=3\pi R^3$

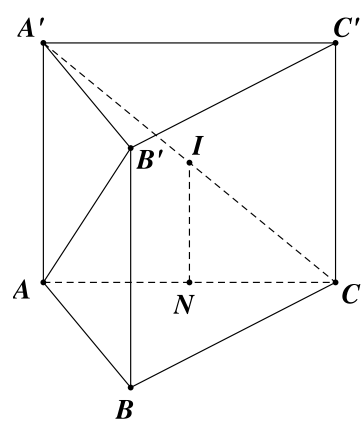
Vậy $\dfrac{V_T}{V_N}=\dfrac{\dfrac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}}{3\pi R^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}.$

Chọn A.

Bài 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AC=a\sqrt{3},$ góc ACB bằng 30^0. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

A . $\dfrac{3a}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{8}$

Lời giải



Ta có $60^0=\left(AB',(ABC)\right)=\left(AB',AB\right)=B'AB.$

Trong tam giác ABC, ta có $AB=AC.\sin ACB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Trong $\Delta B'BA,$ ta có $BB'=AB.\tan B'AB=\dfrac{3a}{2}.$

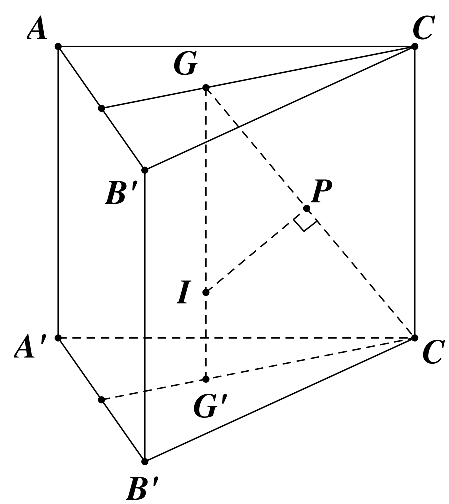
Gọi N là trung điểm AC,

suy ra N là tâm đường tròn

ngoại tiếp ΔABC.
Gọi I là trung điểm $A'C$,
suy ra $IN//A'A \Rightarrow IN \perp (ABC)$.
Do đó IN là trục của ΔABC,
suy ra $IA = IB = IC \quad (1)$
Hơn nữa, tam giác $A'AC$ vuông tại A có I là trung điểm A'C nên $IA' = IB' = IC' \quad (2)$
Từ $(1),(2)$, ta có $IA' = IA = IB = IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ với bán kính $R = IA' = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$.
Chọn B.
Bài 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60^0 và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A . $\dfrac{85a}{108}$ **B.** $\dfrac{3a}{2}$ **C.** $\dfrac{3a}{4}$ **D.** $\dfrac{31a}{36}$

Lời giải
\
Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có: $60^0 = ((AB'C'),(A'B'C')) = (AM, A'M) = \text{AMA}'$.
Trong ΔAA'M, có $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $\quad$ AA'=A'M.tanAMA'$= \dfrac{3a}{2}$.



Gọi G'là trọng tam tam giác đều $A'B'C'$,
suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$ vì lăng trụ đứng
nên $GG' \perp (A'B'C')$.
Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.
Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I.
Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $GA'B'C'$, bán kính $R = GI$.
Ta có $\Delta GPI \backsim \Delta GG'C' \Rightarrow \dfrac{GP}{GG'} = \dfrac{GG'}{GC'}$

$\Rightarrow R = GI = \dfrac{GP.GC'}{GG'} = \dfrac{GC'^2}{2GG'} = \dfrac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \dfrac{31a}{36}$.
Chọn D.