CHƯƠNG 04
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

……………………………………………………………………....

- ❖ Các khái niệm cơ bản nhất

Chủ đề 1. Các bài toán tính toán số phức

- ❖ Bài tập áp dụng
- ❖ Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Phương trình số phức

- ❖ Bài tập áp dụng
- ❖ Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Các bài toán liên quan đến biểu diễn điểm, tập hợp điểm

- ❖ Bài tập áp dụng
- ❖ Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 04
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

Trong chương trình phổ thông, các bài toán số phức thường khá đơn giản, không quá khó. Tuy nhiên cũng có những bài toán vận dụng và vận dụng cao mà chúng a nếu không nghiên cứu kĩ lưỡng, lần đầu tiên gặp sẽ rất khó giải quyết. Trước khi đến với lớp bài toán này chúng ta cùng nhắc lại các khái niệm căn bản nhất.

Các khái niệm cơ bản nhất

Định nghĩa

- Một biểu thức dạng $a+bi$ với $a,b\in R, i^2=-1$ được gọi là một số phức.
- Đối với số phức $z=a+bi,$ ta nói a là phần thực, b là phần ảo của $z.$
- Tập hợp số phức kí hiệu là **C.**

- **Hai số phức bằng nhau**
  - Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.
  - Công thức: $a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

  Biểu diễn hình học của số phức.
  - Điểm $M(a;b)$ trong hệ tọa độ vuông góc Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi.$

  Môđun của số phức.
  - Cho số phức $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
  - Công thức $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$
- **Số phức liên hợp**
  - Cho số phức $z=a+bi,$ số phức dạng $\overline{z}=a-bi$ được gọi là số phức liên hợp của $z.$

  Phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia.
  - Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di,$ ta có $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
  - Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di,$ ta có $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$
  - Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di,$ ta có $z_1.z_2=(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$
  - Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di,$ (với $z_2\neq 0$) tacó :

  $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\dfrac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$

  Phương trình bậc hai với hệ số thực.

  Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in R$ và $a\neq 0.$ Phương trình này có biệt thức $\Delta=b^2-4ac,$ nếu:
  - $\Delta=0$ phương trình có nghiệm thực $x=-\dfrac{b}{2a}.$
  - $\Delta>0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$
  - $\Delta<0$ phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{\Delta}}{2a}.$

- **Acgumen của số phức** $z \neq 0$

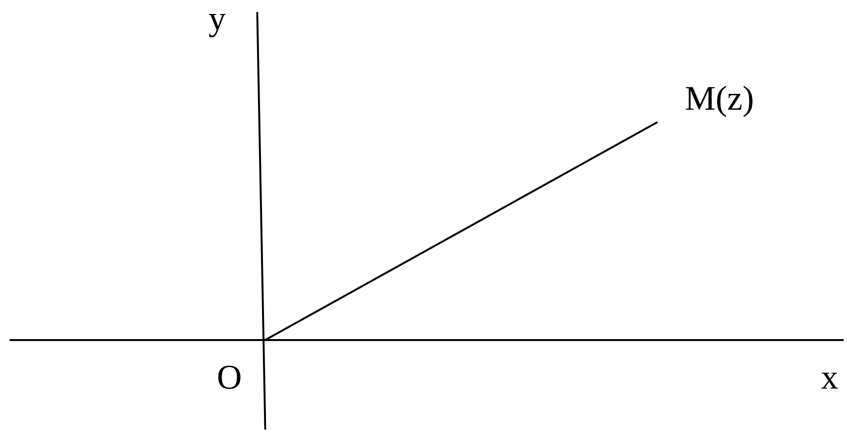
ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là acgumen của z.

CHÚ Ý

Nếu φ là một acgumen của z (hình dưới) thì gọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in Z$.

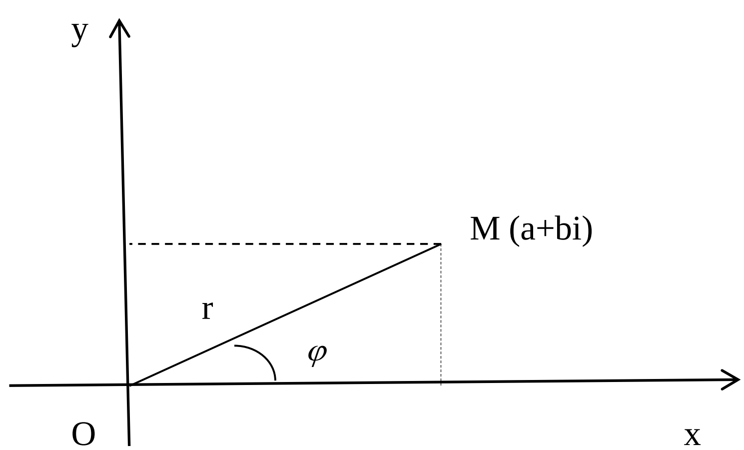
(người ta thường nói: Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi, k \in Z$).



- **Dạng lượng giác của số phức**

Xét số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbf{R})$. Kí hiệu r là mô đun của z và φ của một acgumen của z (hình dưới) thì dễ thấy rằng: $a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$.

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



ĐỊNH NGHĨA

Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$.

Dạng $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbf{R})$, được gọi là **dạng đại số của số phức** z.

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbf{R})$ khác 0 cho trước ta cần:

1. Tìm r: đó là mô đun của $z, r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2. Tìm φ: đó là một acgumen của z; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

CHÚ Ý

1. $|Z| = 1$ khi và chỉ khi $Z = \cos\varphi + i\sin\varphi; (\varphi \in \mathbf{R})$.

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

- **Nhân và chia số phức lượng giác**

Ta đã công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lý nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác; chúng giúp cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÝ

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0, r' \geq 0)$

Thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]; (khi\, r > 0)$

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các mô đun và tổng acgumen; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các mô đun và hiệu các acgumen.

Chứng minh

$$zz' = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]\lim_{x\to\infty}$$

$$= rr'[\cos\varphi.\cos\varphi' - \sin\varphi.\sin\varphi' + i(\sin\varphi.\cos\varphi' + \cos\varphi.\sin\varphi')]$$

$$= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

Mặt khác, ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức,

Ta có: $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$.

- **Công thức Moa-vrơ (Moivre)**

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n.

$$\boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Và khi $r = 1$, ta có

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là công thức Moa – vrơ.

- **Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác**

Từ công thức Moa – vrơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r > 0$ có căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)\right).$$

Để nắm được các kiến thức trên học sinh cần phải luyện tập khá nhiều bài tập, xin chú ý để làm các bài tập ngay sau đây quý bạn đọc cần phải khá vững phần căn bản số phức.

CHỦ ĐỀ 1.
CÁC BÀI TÍNH TOÁN SỐ PHỨC.

Bài 1: Cho hai số phức z_1, z_2 thảo mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}.$ Tính $|z_1 + z_2|$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Nhận xét: Bài này nhìn vào có vẻ khá khó, nhưng các em cần phải bình tĩnh, chỉ cần gọi $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i\ \left(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}\right)$ sau đó viết hết các giả thiết đề bài cho:

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^{\ 2} + b_1^2 = a_2^{\ 2} + b_2^2 = 1 \\ \left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(b_1 + b_2\right)^2 = 3 \end{cases}$$

Và viết cái cần tính ra $|z_1 - z_2|^2 = \left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2$. Hãy quan sát cái cần tính và thấy rằng chỉ cần bình phương lên là có thể dùng được giả thiết.

Lời giải

Ta có: $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i\ \left(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}\right)$

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^{\ 2} + b_1^2 = a_2^{\ 2} + b_2^2 = 1 \\ \left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(b_1 + b_2\right)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right) = 1 \Rightarrow \left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2 = 1$$

Vậy: $|z_1 - z_2|^2 = \left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2 = 1.$

Chọn A.

Bài 2: Tính $z = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2008}$ có kết quả:

A. 0 **B.** 1 **C.** $-i$ **D.** i

Lời giải

Ta có $iz = i^2 + i^3 + ... + i^{2008} + i^{2009}$ và $z = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2008}.$

Suy ra $z\left(i - 1\right) = i^{2009} - i = i\left(i^{2008} - 1\right) = 0 \Rightarrow z = 0$

Chọn A.

Bài 3: Tìm số phức z có $|z| = 1$ và $|z + i|_{\max}$:

A. 1 **B.** -1 **C.** i **D.** $-i$

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}; |z + i| = \sqrt{a^2 + \left(b + 1\right)^2}$

Khi đó ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |b| \le 1; |z + i| = \sqrt{a^2 + \left(b + 1\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1} = \sqrt{2b + 2} \le 2$

Do đó giá trị lớn nhất đạt được bằng 2 khi $a = 0; b = 1; z = i.$

Chọn C.

Bài 4: Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = 1.$ Tìm số phức z để $|1 + z| + 3|1 - z|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$ **B.** $z = -\frac{3}{5}i, z = \frac{3}{5}i.$

C. $z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$ **D.** $z = -\frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$

Lời giải

Giả sử $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbf{R}\right)$

Vì $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Khi đó:

$|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+3\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$=\sqrt{(x+1)^2+1-x^2}+3\sqrt{(x+1)^2+1-x^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có:

$f'(x)=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{1-x}}\right); f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}$

Ta có: $f(-1)=6; f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{10}$

Vậy $f_{\max}=f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{5} \\ y^2=1-x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{5}; y=-\dfrac{3}{5} \\ x=-\dfrac{4}{5}; y=\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy $z=-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i, z=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i.$

Chon A.

Bài 5: Cho z là số phức có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\mathrm{w}}=\dfrac{1}{z+\mathrm{w}}.$ Mô đun của số phức z là:

A. 2015 **B.** 1 **C.** 2017 **D.** 0

Lời giải

Từ $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\mathrm{w}}=\dfrac{1}{z+\mathrm{w}}$ ta suy ra $z^2+\mathrm{w}^2+z\mathrm{w}=0 \Rightarrow \left(z+\dfrac{\mathrm{w}}{2}\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{3}\mathrm{w}}{2}\right)^2 \Rightarrow z=\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{w}$

Lấy mô đun hai vế ta có $|z|=|\mathrm{w}|=2017.$

Chọn C.

Bài 6: Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{Z}(1+i)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ là:

A. $z=1+3i$ **B.** $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ **C.** $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ **D.** $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4}i$

Lời giải

+ Gọi $z=x+yi$

Từ giả thiết ta có: $(x+y-3)^2+(x-y+2)^2=\dfrac{13}{4}.$

+ Đồng thời $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ lớn nhất. Kiểm tra các đáp án và so sánh.

Chọn D.

Bài 7: Số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $|z|\geq 2.$ Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|.$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có $1-\left|\frac{i}{z}\right|\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\left|\frac{i}{z}\right|\Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}.$

Mặt khác $|z|\ge 2\Leftrightarrow\frac{1}{|z|}\le\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2}\le P\le\frac{3}{2}.$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Chọn B.

Bài 8: Tìm phần thực của số phức $z=(1+i)^n, n\in\mathbf{N}$ thỏa mãn phương trình:

$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Điều kiện $n>3, n\in\mathbf{N}$

Phương trình: $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3\Leftrightarrow\log_4(n-3)(n+9)=3\Leftrightarrow n=7$ (so đk)

$z=(1+i)^7=(1+i)\left[(1+i)^2\right]^3=(1+i)(2i)^3=8-8i$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Chọn D.

Bài 9: Cho số phức z thảo mãn $|z-4i-2|=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,$ ta có: $|a+bi-3+4i|=4\Rightarrow(a-3)^2+(b+4)^2=16$

Đặt $\begin{cases}a-3=4\sin\varphi\\ b+4=4\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3+4\sin\varphi\\ b=4\cos\varphi-4\end{cases}$

$\Rightarrow|z|^2=a^2+b^2=9+16\sin^2\varphi+24\sin\varphi+16-32\cos\varphi$

$=41+24\sin\varphi-32\cos\varphi=41+40\left(\frac{3}{5}\sin\varphi-\frac{4}{5}\cos\varphi\right)$

Đặt $\cos\varphi=\frac{3}{5},\sin\varphi=\frac{4}{5}\Rightarrow|z|^2=a^2+b^2=41+40\sin(\varphi-\alpha)\ge 1.$

Dấu $"="$ xảy ra khi $\varphi-\alpha=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{2}+\alpha+k2\pi.$

Vậy $\min|z|=1.$

Chọn A.

Bài 10: Trong các sô phức thỏa điều kiện $|z-4i-2|=|2i-z|,$ mô đun nhỏ nhất của số phức z bằng:

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $3\sqrt{2}$

Lời giải

Giả sử số phức $z=x+yi$

Theo đề $|z-4i-2|=|2i-z|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow x+y-4=0\Leftrightarrow y=4-x$ (1)

Mà $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}$ (thay (1) vào)

$=\sqrt{2(x-2)^2+8}\ge 2\sqrt{2}.$

Chọn A.

Bài 11: Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

A. $z=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}i$ **B.** $z=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$ **C.** $z=-\frac{3}{4}-\frac{15}{4}i$ **D.** $z=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

Lời giải

Gọi $z=x+yi\left(x,y\in R\right)\Rightarrow \overline{z}=x-yi$

$\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-x-5y+\frac{39}{8}=0.$

(Thay các số phức z vào và mô đun lớn nhất thì ta sẽ chọn).

So với các đáp án trên ta chọn đáp án A.

Chọn A.

Bài 12: (A+A1 2012) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5\left(\overline{z}+i\right)}{z+1}=2-i\,(1)$

Tính mô đun của số phức $\omega=1+z+z^2$.

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{15}$ **C.** $\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{19}$

Lời giải

Giả sử $z=a+bi$

$(1)\Leftrightarrow\frac{5(a-bi+i)}{a+bi+1}=2-i\Leftrightarrow 5a-5i(b-1)=2a+2bi+2-ai-bi^2-i$

$\Leftrightarrow 3a-2-b-i(5b-5-2b+a+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2-b=0\\3b+a-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow z=1+i$

$\omega=1+1+i+1+2i-1=2+3i\Rightarrow|\omega|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Chọn A.

Bài 13: Cho hai số phức phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z_1|=1;|z_2|=1$ **B.** $z_1=\overline{z_2}$ **C.** $|z_1|=|z_2|$ **D.** $z_1=-z_2$

Lời giải

$z_1\neq z_2\Leftrightarrow z_1-z_2\neq 0$

Thì $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}=0.$

$\Leftrightarrow\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1-z_2}}=0\Leftrightarrow(z_1+z_2)\overline{(z_1-z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1+z_2)}=0.$

$\Leftrightarrow 2\left(z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}\right)=0\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}=0\Leftrightarrow|z_1|-|z_2|=0.$

Chọn C.

CHỦ ĐỀ 2.
PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.

Bài 1: Tìm các số thực a,b,c sao cho hai phương trình $az^2+bz+c=0, cz^2+bz+a+16-16i=0$ có nghiệm chung là $z=1+2i$

A. $(a,b,c)=(1;-2;5)$ **B.** $(a,b,c)=(1;2;5)$

C. $(a,b,c)=(-1;-2;5)$ **D.** $(a,b,c)=(1;-2;-5)$

Lời giải

Theo giả thiết phương trình $az^2+bz+c=0$ có nghiệm $z=1+2i$ khi

$$a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0 \Leftrightarrow -3a+b+c+(4a+2b)i=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Tương tự phương trình $cz^2+bz+a+16-16i=0$ có nghiệm $z=1+2i$ khi

$$c(1+2i)^2+b(1+2i)+a+16-16i=0 \Leftrightarrow c(-3+4i)+b+2bi+a+16-16i=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3c+16)+2(b+2c-8)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-3c+16=0 \\ b+2c-8=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra $(a,b,c)=(1;-2;5)$.

Chọn A.

Bài 2: Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2-2z+2=0$ trên tập số phức. Tìm mô đun của số phức $\omega=(z_1-1)^{2015}+(z_2-1)^{2016}$.

A. $|\omega|=\sqrt{5}$ **B.** $|\omega|=\sqrt{2}$ **C.** $|\omega|=1$ **D.** $|\omega|=\sqrt{3}$

Lời giải

Phương trình $z^2-2z+2=0$ có $\Delta'=1-2=-1=i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1=1-i \\ z_2=1+i \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{array}\right.$

Thay $\left[\begin{array}{l} z_1=1-i \\ z_2=1+i \end{array}\right.$ vào ω ta được : $\omega=(-i)^{2015}+i^{2016}=-(i^2)^{1007}.i+(i^2)^{1013}=-1+i.$

Thay $\left[\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{array}\right.$ vào $\omega=i^{2015}+(-i)^{2016}=(i^2)^{1002}.i+(i^2)^{1003}=-1+i.$

Vậy $|\omega|=\sqrt{2}$.

Chọn B.

Bài 3: Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z) $z^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ là một nghiệm.

A. $b=2;c=-2$ **B.** $b=2;c=2$ **C.** $b=-2;c=-2$ **D.** $b=-1;c=1$

Lời giải

Nếu $z=1+i$ là nghiệm thì : $(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow b+c+(b+2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

Một phương trình bậc hai với hệ số thực, nếu có một nghiệm phức z thì cũng nhận $\overline{z}$ lam nghiệm. Vậy nếu $z=1+i$ là một nghiệm thì $\overline{z}=1-i$ cũng là nghiệm. Theo định lý Vi-ét:

$$\begin{cases} (1+i)+(1-i)=-b \Rightarrow b=-2 \\ (1+i)(1-i)=2=c \end{cases}$$

Chọn A.

Bài 4: Tìm các số thực a,b,c để phương trình (với ẩn z) $z^3+az^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm nghiệm và cũng nhận $z=2$ làm nghiệm.

A. $a=-4;b=6;c=-4$ **B.** $a=-4;b=5;c=-4$

C. $a=-3;b=4;c=-2$ **D.** $a=-1;b=0;c=2$

Lời giải

$z=1+i$ là nghiệm thì $(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$

$z=2$ là ngiệm thì $8+4a+2b+c=0$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} b+c-2=0 & (1) \\ 2a+b+2=0 & (2) \\ 4a+2b+c+8=0 & (3) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $c=2-b$

Từ (2) suy ra $b=-2-2a \Rightarrow c=2-(-2-2a)=4+2a$

Thay vào (3) ta có: $4a+2(-2-2a)+4+2a+8=0 \Rightarrow a=4$

Với $a=-4 \Rightarrow b=6;c=-4.$

Chọn A.

Bài 5: Phương trình $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4=1$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** 4 nghiệm

Lời giải

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2=1,(1) \\ \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2=-1,(2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z+1}{z-1}=1 \\ \dfrac{z+1}{z-1}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+1=z-1 \\ z+1=-z+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i=-i \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z=0$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z+1}{z-1}=i \\ \dfrac{z+1}{z-1}=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+1=iz+1 \\ z+1=-iz-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là: $z=0;z=1;z=-1$

Chọn C.

Bài 6: Số nghiệm phức của phương trình $\overline{z}+\frac{25}{z}=8-6i$ là ?

A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** 4 nghiệm

Lời giải

Giả sử $z=a+bi$ với ; $a,b\in R$ và a,b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\overline{z}=a-bi;\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Khi đó phương trình $\overline{z}+\frac{25}{z}=8-6i\Leftrightarrow a-bi+\frac{25(a-bi)}{a^2+b^2}=8-6i\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(a^2+b^2+25\right)=8\left(a^2+b^2\right) & (1)\\ b\left(a^2+b^2+25\right)=6\left(a^2+b^2\right) & (2)\end{cases}$.

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b=\frac{3}{4}a,$ thế vào $(1).$

Ta có $a=0$ hoặc $a=4.$

Với $a=0\Rightarrow b=0$ (Loại)

Với $a=4\Rightarrow b=3.$ Ta có số phức $z=4+3i.$

Chọn B.

Bài 7: Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4+m)z^2+4m=0.$ Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6.$

A. $m=-1$ **B.** $m=\pm2$ **C.** $m=\pm3$ **D.** $m=\pm1$

Lời giải

$$z^4+(4+m)z^2+4m=0\Leftrightarrow\left(z^2+4\right)\left(z^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm2i\\ z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$$

Nếu $m\le0$ hoặc $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_{1;2}=\pm2i\\ z_{3;4}=\pm i\sqrt{m}\end{array}\right.$ nếu $m>0$

Khi đó $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{-m}\\ m\le0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$

Hoặc $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{m}\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Kết hợp lại $m=\pm1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

CHỦ ĐỀ 3.
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU DIỄN ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM.

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\log_2\left|z-(3-4i)\right|=1.$

A.Đường thẳng qua gốc tọa độ

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính 2

D. Đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính 3

Lời giải

Điều kiện: $z\neq 3-4i$

Gọi $M(x;y)$ với $(x;y)\neq(3;-4)$ là điểm biểu diễn số phức: $z=x+yi;x,y\in\mathbf{R}$

Khi đó $\log_2\left|z-(3-4i)\right|=1\Leftrightarrow\left|z-(3-4i)\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=4$

Vậy tập hợp các điểm số phức z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R=2.$

Chọn C.

Bài 2: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thảo mãn điều kiện: $|z|^2-5z-5\bar{z}=0.$

A.Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5

D. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 3

Lời giải

Đặt $z=x+yi,$ ta có $\bar{z}=x-yi.$

Do đó: $|z|^2-5z-5\bar{z}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-5x--5yi-5x+5yi=0\Leftrightarrow(x-5)^2+y^2=25$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5;0)$.

Chọn C.

Bài 3: Trên mặt phẳng tạo độ $Oxy,$ tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|zi-(2+i)\right|=2.$

A.Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5

D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in R),$ ta có: $\left|zi-(2+i)\right|=2\Leftrightarrow\left|-y-2+(x-1)i\right|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(;-2)$ và bán kính $R=2.$

Chọn D.

Bài 4: Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1|=|z-i|$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5

D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in R)$, ta có: $|z+1|=|z-i|\Leftrightarrow |(x+1)+yi|^2=|x+(y-1)i|^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x^2+1+2x+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow y=-x$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $y=-x$ đi qua gốc tọa độ.

Chọn A.

Bài 5: Trên mặt phẳng tạo độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z|<|2-z|$.

A. Đường thẳng đi qau gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính bằng 1.

C. Nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2.

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in R)$, ta có: $|2+z|<|2-z|\Leftrightarrow |2+z|^2<|2-z|^2$

$\Leftrightarrow |(2+x)+iy|^2<|(2-x)-iy|^2 \Leftrightarrow (2+x)^2+y^2<(2-x)^2+(-y)^2 \Leftrightarrow x<0$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

Chọn C.

Bài 6: Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(2i-1)-i+2=0$.

A. $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$

B. $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{7}\right)$

C. $M\left(\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$

D. $M\left(\frac{4}{9};\frac{3}{5}\right)$

Lời giải

$z(2i-1)-i+2=0 \Leftrightarrow z=\frac{i-2}{2i-1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Chọn A.

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1-i|=2$.

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2=8$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Lời giải

$M(x;y), x,y \in \mathbf{R} \Rightarrow z = x+yi \Rightarrow z+1-i=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=2$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn $(x+1)^2+(y-1)^2=4.$

Chọn A.

Bài 8: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|=3.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|.$

A. $\sqrt{13}-3$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{13}-2$ **D.** 2

Lời giải

Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=3$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3.$

(Ý nghĩa hình học của $|z|$: độ dài OM)

Ta có $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$

điểm $M \in (C)$ và OM nhỏ nhất.

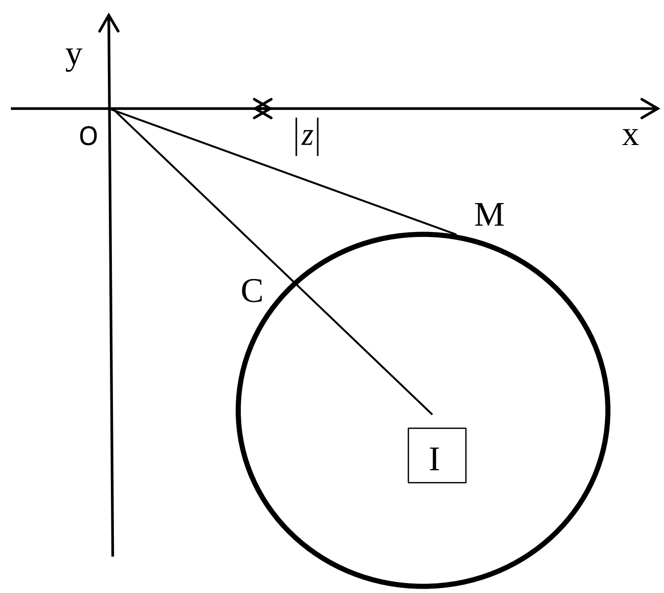
(Bài hình học giải tích quen thuộc)

Ta có: $\text{OM} \ge \text{OI-IM=OI-R=}\sqrt{13}-3$

Dấu "$=$" xảy ra khi M là giao

điểm của (C) và đoạn thẳng $OI.$

Vậy GTNN của $|z|$ là $\sqrt{13}-3.$



Chọn A.

Bài 9: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1),$ bán kính bằng $\sqrt{5},$ khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3).$

B. Đường tròn tâm $I(-1;-3),$ bán kính bằng $\sqrt{5},$ khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3).$

C. Đường tròn tâm $I(-1;-4),$ bán kính bằng $\sqrt{5},$ khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3).$

D. Đường tròn tâm $I(-2;-1),$ bán kính bằng $\sqrt{5},$ khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3).$

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\,(a,b\in\mathbf{R}),(z\ne i),$ khi đó: $u=\dfrac{a+2+bi+3i}{a+(b-1)i}=\dfrac{\big(a+2+(b+3)i\big)\big(a-(b-1)i\big)}{a^2+(b-1)^2}$

Tử số bằng $a^2+b^2+2a+2b-3+2(2a-b+1)i$ u là số thuần ảo khi và chỉ khi :

$\begin{cases} a^2+b^2+2a+2b-3=0 \\ 2a-b+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2+(b+1)^2=5 \\ (a;b)\neq (0;1),(-2;-3) \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

Chọn A.

Bài 10: Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của 3 số phức $1+2i,(1+i)(1+2i),\dfrac{2+6i}{3-i}$. Diện tích tam giác ABC bằng:

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Dùng máy tính Casio ta có $A(1;2),B(3;1),C(0;2)$.

Dùng công thức $S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$ với $\overrightarrow{AB}=(2;-1;0),\overrightarrow{AC}=(-1;0;0)$

Dùng máy tính ta có kết quả B: $S=\dfrac{1}{2}$.

(Có thể dùng công thức tính diện tích phần Oxy tính nhanh hơn)

Chọn B.

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy có $A(1;7),B(-5;5)$ lần lượt biểu diễn 2 số phức z_1 và z_2. C biểu diễn số phức z_1+z_2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. C có tọa độ $(-4;12)$.

B. $OACB$ là hình thoi.

C. $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức z_1-z_2.

D. $\overrightarrow{CB}$ biểu diễn số phức $-z_1$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}$ biểu diễn cho $z_1,\overrightarrow{OB}$ biểu diễn cho z_2 nên $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ biểu diễn cho z_1-z_2.

Các câu còn lại dễ dàng kiểm tra là đúng.

Chọn C.

Bài 12: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=1$. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là:

A. Đường tròn $x^2+(y+2)^2=5$

B. Đường tròn $x^2+y^2-2x-4y=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2-2y=0$

D. Đường tròn $x^2+y^2+4x=0$

Lời giải

Đặt $z=x+iy\Rightarrow |x+iy-i|=1\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0$.

Chọn C.

Bài 13: Cho A là điểm biểu diễn của các số phức: $z=1-2i;M_1,M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 và z_2. Điều kiện để ΔAM_1M_2 cân tại A là:

A. $|z_1| = |z_2|$ **B.** $|z_1 - 1 + 2i| = |z_2 - 1 + zi|$

C. $|z_1 - z_2| = |1 - 2i|$ **D.** $|z_1 - 1 + 2i| = |z_1 - z_2|$

Lời giải

ΔAM_1M_2 cân tại A nên $M_1A = M_1M_2$ hay: $z_1 - 1 + 2i = z_2 - 1 + 2i$

Chọn B.

Bài 14: Biết điểm $M(1;-2)$ biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ phức. Tính mô đun của số phức $\omega = iz - z^2$.

A. $\sqrt{26}$ **B.** $\sqrt{25}$ **C.** $\sqrt{24}$ **D.** $\sqrt{23}$

Lời giải

Vì điểm $M(1;-2)$ biểu diễn z nên $z = 1 - 2i \Rightarrow \overline{z} = 1 + 2i$

Do đó: $\omega = i(1+2i) - (1-2i)^2 = -2 + i - (-3 - 4i) = 1 + 5i \Rightarrow |\omega| = \sqrt{26}.$

Chọn A.

Bài 15: Trong mặt phẳng phức $A(-4;1), B(1;3), C(-6;0)$ lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $3 + \frac{3}{4}i$ **B.** $-3 + \frac{3}{4}i$ **C.** $3 - \frac{3}{4}i$ **D.** $-3 - \frac{3}{4}i$

Lời giải

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-3; \frac{4}{3}\right)$.

Vậy G biểu diễn số phức $z = -3 + \frac{4}{3}i.$

Chọn B.

Bài 16: Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $i, 1+3i, a+5i\ (a \in R)$. Biết tam giác ABC vuông tại $B.$ Tìm tọa độ của C?

A. $C(-3;5)$ **B.** $C(3;5)$ **C.** $C(2;5)$ **D.** $C(-2;5)$

Lời giải

Ta có: $A(0;1), B(1;3), C(a;5)$

Tam giác ABC vuông tại B nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-1;-2) \\ \overrightarrow{BC} = (a-1;2) \end{cases}$

$\Rightarrow -1(a-1) + (-2)2 = 0 \Leftrightarrow a = -3.$ Vậy $C(-3;5).$

Chọn A.

Bài 17: Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz-1)(z+3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$ là các điểm nào sau đây?

A. $A(0;-1); B(0;-3); C(2;3)$ **B.** $A(1;0); B(3;0); C(2;-3)$

C. $A(0;-2); B(0;1); C(-2;3)$ **D.** $A(2;-2); B(-1;1); C(-1;0)$

Lời giải

$$(iz-1)(z+3i)(\overline{z}-2+3i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} iz-1=0 \\ z+3i=0 \\ \overline{z}-2+3i=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{i}=-i \\ z=-3i \\ \overline{z}=2-3i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z=-3i \\ z=2+3i \end{array}\right.$$

Vậy các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho là $A(0;-1);B(0;-3);C(2;3)$.

Chọn A.

Bài 18: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z biết $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là:

A. Elip $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

B. Parabol $y^2=4x$

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$

D. Đường thẳng $6x+8y-25=0$

Lời giải

Đặt $z=x+iy(x,y\in R)$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z.

Ta có $\begin{cases} |z|=\sqrt{x^2+y^2} \\ \overline{z}-3+4i=x-iy-3+4i=(x-3)+(-y+4)i \end{cases}$

$\Rightarrow |\overline{z}-3+4i|=\sqrt{(x-3)^2+(-y+4)^2}$

Vậy: $|z|=|\overline{z}-3+4i| \Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(-y+4)^2 \Leftrightarrow 6x+8y-25=0$

Chọn D.

Bài 19: Trong mặt phẳng phức, cho M,M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z':z=x+yi,z'=\dfrac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục tung và $M'\neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Lời giải

Ta có: $z'=\dfrac{z-1+i}{z-1}=\dfrac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi}=\dfrac{(x-1)^2+y(y+1)+(x-1)i}{(x-1)^2+y^2}$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M'\neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thuần ảo khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y(y+1)=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+y-1=0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (E)$ là đường tròn tâm $I\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn A.

Bài 20: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z': z = x + yi, z' = \dfrac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục hoành và $M' \neq 0.$

A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y = 1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Lời giải

Ta có: $z' = \dfrac{z-1+i}{z-1} = \dfrac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi} = \dfrac{(x-1)^2 + y(y+1) + (x-1)i}{(x-1)^2 + y^2}$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0.$

$\Rightarrow z'$ là một số thực.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y(y+1) \neq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (E)$ là đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn D.

Bài 21: Tìm quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $w = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z-1| \leq 2 (1)$.

A. Hình tròn $(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leq 16$

B. Hình tròn $(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leq 9$

C. Hình tròn $(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leq 25$

D. Hình tròn $(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leq 36$

Lời giải

Giả sử $w = a + bi$

Ta có: $a + bi = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z - 1 = \dfrac{a-3+\left(b-\sqrt{3}i\right)}{1+i\sqrt{3}}$

$(1) \Leftrightarrow \left|\dfrac{a-3+\left(b-\sqrt{3}i\right)}{1+i\sqrt{3}}\right| \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(a-3)^2 + \left(b-\sqrt{3}i\right)^2}}{2} \leq 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + \left(b-\sqrt{3}\right)^2 \leq 16$

Vậy quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 \leq 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên)

Chọn A.

Bài 22: Trong mặt phẳng phức, gọi N, M, A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn các số: $z = x + yi; Z = X + Yi = \dfrac{z+1}{z-1}; 1; -1.$ Tìm tập hợp điểm M khi N chạy trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1.$

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2}; 0\right)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$

C. Trục tung

D. Trục hoành

Lời giải

Ta có: $Z = X + Yi = \dfrac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow X = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}; Y = \dfrac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$

Vì N chạy trên đường tròn: $(x-1)^2+y^2=1$ nên ta có $(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow X=0$

Vậy tập hợp điểm M là trục tung.

Chọn C.

Bài 23: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x+yi; a = 10+6i.$ Tìm tập hợp E_1 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thực.

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Là một hyperbol vuông góc $y=\dfrac{3x}{x-5}, x\neq 5$

D. Là một hyperbol $y=\dfrac{3x}{x-5}, x\neq 5$

Lời giải

Ta có: $z(z-a)=(x+yi)(x+yi-10-6i)=(x+yi)\left[(x-10)+(y-6)i\right]$

$=x(x-10)-y(y-6)+(2xy-10y-6x)i$

Tích $z(z-a)$ là một số thực.

$\Leftrightarrow 2xy-10y-6x=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{x-5}, x\neq 5$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_1 là một hyperbol vuông góc có phương trình: $y=\dfrac{3x}{x-5}, x\neq 5.$

Chọn C.

Bài 24 : Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x+yi; a = 10+6i.$ Tìm tập hợp E_2 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng $I(-5;-3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

D. Là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

Lời giải

Tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$\Leftrightarrow x(x-10)-y(y-6)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-10x\right)-\left(y^2-6y\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2-(y-3)^2=16 \Leftrightarrow \dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_2 là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

Chọn C.

Bài 25: Tìm tập hợp (T) các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức $z+\bar{z}=|z|$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $x=y\sqrt{3}, x=-y\sqrt{3}$

D. Đường thẳng $y=x\sqrt{3}, y=-x\sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbf{R}$

Ta có $z+\bar{z}=|z| \Leftrightarrow (x+yi)+(x-yi)=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 4x^2=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y=\pm x\sqrt{3} \end{cases}$

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng biểu diễn số phức $z=x+yi$ gồm hai đường thẳng:

$D_1: y=x\sqrt{3}$

$D_2: y=-x\sqrt{3}$

Chọn D.