CH□ ƠNG 2 – MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. DIỆN TÍCH MẶT CẦU – THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Hình cầu với bán kính R, ta có các kết quả:

- Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ – THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Với hình trụ có bán kính đáy R và đ□ờng cao h, ta có các kết quả:

- Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh$.
- Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h$.

3. DIỆN TÍCH HÌNH NÓN – THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Với hình nón có bán kính đáy R, đ□ờng sinh l và đ□ờng cao h, ta có các kết quả:

- Diện tích hình nón là $S_{xq} = \pi R l$.
- Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

B PH□ ƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng toán 1: Diện tích mặt cầu – Thể tích khối cầu

Ph□ơng pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu chúng ta thực hiện theo các b□ớc:

B□ớc 1: Dựa vào giả thiết tính R.

B□ớc 2: Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

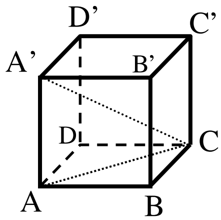
Chú ý: Thông th□ờng chúng ta gặp những yêu cầu trên sau khi thực hiện đòi hỏi "*Xác định tâm và bán kính tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hoặc nội tiếp* một khối đa diện".

Thí dụ 1. *Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích th- ớc là* a, b, c. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.*

Giải

Với hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', gọi R là bán kính của mặt cầu.

Ta có:



$$R = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AC^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

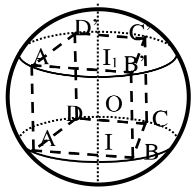
Khi đó, ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \text{ (đvdt)}.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3} \text{ (đvtt)}.$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ chúng ta cần lưu ý:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ đứng có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy hoặc có thể coi nó là giao điểm của mặt phẳng trung trực một cạnh bên với trục OO_1.



3. Bán kính mặt cầu được tính dựa theo các hệ thức lượng trong tam giác và tứ giác.

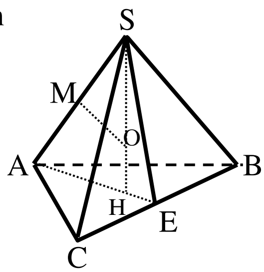
Thí dụ 2. *Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng* a *và chiều cao bằng* h.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu t- ơng ứng.*

✍ *Giải*

a. Dựng $SH \perp (ABC)$, suy ra $HA = HB = HC$, tức H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Trong ΔSAH dựng đường trung trực của SA cắt SH tại O, ta được:

$$OA = OB = OC = OS$$

$\Leftrightarrow$ Mặt cầu (O, OS) ngoại tiếp tứ diện.

Vì ΔSMO và ΔSHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OS}{SA} = \frac{SM}{SH} \Rightarrow OS = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SH^2 + AH^2}{2SH}$$
$$= \frac{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2h} = \frac{3h^2 + a^2}{6h}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều ABCD là (O, $\dfrac{3h^2+a^2}{6h}$).

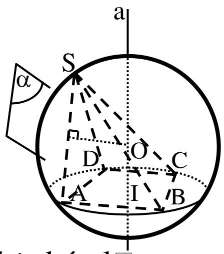
b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3h^2+a^2}{6h}\right)^2 = \frac{\pi\left(3h^2+a^2\right)^2}{9h^2} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3h^2+a^2}{6h}\right)^3 = \frac{\pi\left(3h^2+a^2\right)^3}{162h^3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt cầu ngoại tiếp hình chóp chúng ta cần lưu ý:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp một đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.



3. Bán kính mặt cầu được tính dựa theo các hệ thức lượng trong tam giác và tứ giác.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện* ABCD *có* AD = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC), ΔABC *vuông tại* B *và* AB = b, BC = c.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.*
b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

✍ *Giải*

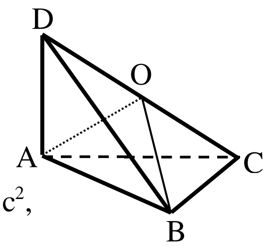
a. Gọi O là trung điểm của CD, nhận xét rằng:

$AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp AC \Leftrightarrow \Delta ACD$ vuông tại A $\Rightarrow OA = OC = OD$.

$\begin{cases} AD \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD$

$\Leftrightarrow \Delta BCD$ vuông tại B $\Rightarrow OB = OC = OD$.

Vậy, mặt cầu (O, OA) ngoại tiếp tứ diện ABCD.



Ta lần lượt có:

$CD^2 = AD^2 + AC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

$R = OA = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Nh□ vậy, với tứ diện ABCD ở trên chúng ta đã sử dụng tính chất đ□ờng trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông để xác định đ□ợc điểm O cách đều các đỉnh của tứ diện.

<u>Dạng toán 2:</u> Diện tích xung quanh của hình trụ – Thể tích khối trụ

Ph□ơng pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích xung quanh hình trụ và thể tích khối trụ chúng ta thực hiện theo các b□ớc:

<u>B□ớc 1:</u> Dựa vào giả thiết tính R, h.

<u>B□ớc 2:</u> Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ và thể tích khối trụ.

☞ ***Chú ý***: Với khối trụ *nội tiếp* và *ngoại tiếp* chúng ta sử dụng định nghĩa hình trụ cùng tính chất của các khối hình liên quan.

<u>Thí dụ 1.</u> *Một hình trụ* T *có bán kính đáy* R *và chiều cao* $R\sqrt{3}$.

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ* T.

b. *Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ* T.

✍ *Giải*

a. Ta lần l□ợt có:

$$S_{xq} = 2\pi R.\ R\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3}\ \text{(đvdt)}.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi R^2\sqrt{3} + 2\pi R^2 = 2\pi R^2\left(\sqrt{3}+1\right)\ \text{(đvdt)}.$$

b. Ta có ngay:

$$V = \pi R^2.R\sqrt{3} = \pi R^3\sqrt{3}\ \text{(đvtt)}.$$

☞ ***Nhận xét***: Nh□ vậy, để thực hiện đ□ợc yêu của bài toán trên chúng ta chỉ cần nhớ đ□ợc các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

<u>Thí dụ 2.</u> *Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ* (**T**), *cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông có diện tích bằng* a^2.

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ* (**T**).

b. *Tính thể tích của khối trụ* (**T**).

✍ *Giải*

a. Vì thiết diện qua trục là một hình vuông có diện tích bằng a^2 nên cạnh của nó bằng a và từ đó suy ra hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{a}{2}$ và chiều cao bằng a.

Ta có ngay:

$$S_{xq} = 2\pi\frac{a}{2}.a = \pi a^2\ \text{(đvdt)}.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = \pi a^2 + 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{2}\ \text{(đvdt)}.$$

b. Ta có ngay:

$$V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Nh□ vậy, để thực hiện đ□ợc yêu của bài toán trên tr□ớc tiên chúng ta cần đi xác định độ dài đ□ờng cao và bán kính đáy của hình trụ.

<u>**Dạng toán 3:**</u> Diện tích xung quanh của hình nón – Thể tích khối nón

Ph□ơng pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón chúng ta thực hiện theo các b□ớc:

<u>***B□ớc 1:***</u> Dựa vào giả thiết tính R, h, *l*.

<u>***B□ớc 2:***</u> Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình nón và thể tích khối nón.

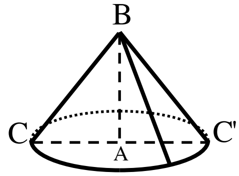
☞ ***Chú ý***: Với khối nón *nội tiếp* và *ngoại tiếp* chúng ta sử dụng định nghĩa hình nón cùng tính chất của các khối hình liên quan.

<u>**Thí dụ 1.**</u> *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AB = a, AC = b. *Xét hình tròn xoay* (N) *sinh bởi* ΔABC *khi quay quanh đ- ờng thẳng* AB. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của* (**N**).

✍ *Giải*

Hình tròn xoay (**N**) sinh bởi ΔABC khi quay quanh đ□ờng thẳng AB là hình nón có các thuộc tính:

- Bán kính đáy R = AC = b.
- Chiều cao h = AB = a.
- Đ□ờng sinh $l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Từ đó, ta lần l□ợt có:

$$S_{xq} = \pi R l = \pi b\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (đvdt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi R l + \pi R^2 = \pi b\sqrt{a^2 + b^2} + \pi b^2 = \pi b(\sqrt{a^2 + b^2} + b) \text{ (đvdt).}$$

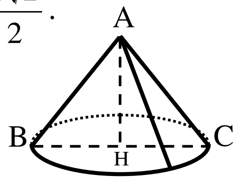
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi b^2.a \text{(đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Nh□ vậy, để thực hiện đ□ợc yêu của bài toán trên tr□ớc tiên chúng ta cần đi xác định các thuộc tính về độ dài của hình nón (bán kính đáy, chiều cao và đ□ờng sinh). Và công việc cuối cùng chỉ cần nhớ đ□ợc các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích khối nón.

<u>**Thí dụ 2.**</u> *Cắt mặt nón* (**N**) *bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta đ- ợc thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh* a. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình nón* (**N**).

Giải

Giả sử thiết diện là ΔABC vuông cân tại đỉnh A cạnh a, từ đó suy ra hình nón dã cho có các thuộc tính:



- Bán kính đáy và chiều cao $R = h = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.AB\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Đ□ờng sinh $l = AB = a$.

Từ đó, ta lần l□ợt có:

$$S_{xq} = \pi R l = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đ} = \pi R l + \pi R^2 = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+2\right)}{2} \text{ (đvdt)}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12} \text{ (đvtt)}.$$

Chú ý: Các em học sinh cần nhớ lại hai định nghĩa sau:

1. Một mặt cầu gọi là *ngoại tiếp* hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đ□ờng tròn đáy của hình nón. Hình nón nh□ vậy gọi là *nội tiếp* mặt cầu đó.
2. Một mặt cầu gọi là *nội tiếp* nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đ□ờng sinh của hình nón. Khi đó hình nón đ□ợc gọi là *ngoại tiếp* mặt cầu.

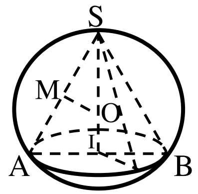
Thí dụ 3. *Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính* R. *Nếu hình nón đó có chiều cao bằng* h. *Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.*

Giải

Thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB cân tại S. Trong (SIA), dựng trung trực Mx của đoạn SA và cắt SI tại O.

Vậy, mặt cầu (O; OS) ngoại tiếp hình nón có bán kính đáy r và đ□ờng sinh l.

Dựa trên tính chất đồng dạng của tam giác, ta có:



$$\frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI} \Leftrightarrow SO.SI = SA.SM = SA.\frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SA^2$$

$$\Leftrightarrow SA^2 = 2SO.SI \Leftrightarrow l = SA = \sqrt{2hR}.$$

Trong ΔSAI, ta có:

$$\Leftrightarrow AI^2 = SA^2 - SI^2 \Leftrightarrow r = AI = \sqrt{2hR - h^2} = \sqrt{h(2R-h)}.$$

Từ đó, ta lần l□ợt có:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi\sqrt{h(2R-h)}.\sqrt{2hR} = \pi h\sqrt{2R(2R-h)} \text{ (đvdt)}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{h(2R-h)}\right)^2.h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R-h) \text{ (đvtt)}.$$

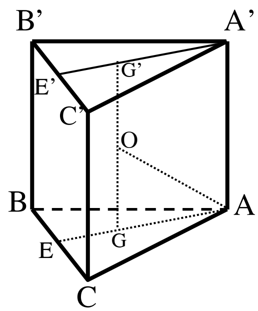
C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho hình lăng trụ đứng* ABC.A'B'C', *đáy là tam giác đều cạnh* a, AA' = b.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu t- ơng ứng.*

Giải



a. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và ΔA'B'C' và O là trung điểm GG'.

Vì GG' là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔA'B'C', ta có:

OA = OB = OC, OA' = OB' = OC',

OA = OA',

suy ra:

OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'

⇔ Mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C'.

Trong ΔOAG, ta có:

$$OA^2 = AG^2 + OG^2 = \left(\frac{2}{3}AE\right)^2 + \left(\frac{1}{2}GG'\right)^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' là $(O, \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}})$.

b. Ta lần l□ợt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác vuông đỉnh* A, AB = a, AC = b, SA = c *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC).

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu t- ơng ứng.*

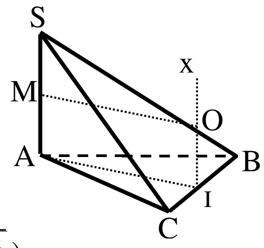
Giải

a. Vì ΔABC vuông tại A nên trung điểm I của BC là tâm đ□ờng tròn ngoại tiếp ΔABC, dựng Ix song song với SA.

Trong mặt phẳng (SA, Ix) dựng đ□ờng trung trực của SA cắt Ix tại O, ta đ□ợc:

$OA = OB = OC = OS \Leftrightarrow$ Mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp tứ diện.

Trong ΔAMO vuông tại M, ta có:



$$R = OA = \sqrt{MA^2 + MO^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là (O, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$).

b. Ta lần l□ợt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 3: (Đề thi đại học khối D – 2003): *Cho hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau, có giao tuyến là đ- ờng thẳng* (Δ). *Trên* (Δ) *lấy hai điểm* A, B *và* AB = a. *Trong mặt phẳng* (P) *lấy điểm* C, *trong mặt phẳng* (Q) *lấy điểm* D *sao cho* AC, BD *cùng vuông góc với* (Δ) *và* AC = BD = AB.

a. *Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* ABCD.
b. *Tính khoảng cách từ* A *đến mặt phẳng* (BCD) *theo* a.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Nhận xét rằng:

- ΔACD vuông tại A $\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^0$.
- ΔBCD vuông tại B $\Rightarrow \widehat{CBD} = 90^0$.

Vậy, tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu đ□ờng kính CD.

Do đó:

$$R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH = d(A, (BCD)).$$

Trong ΔABC vuông cân tại A, ta có $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a, *mặt phẳng* (SAB) *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD), SA = SB = a.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*
b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu t- ơng ứng.*

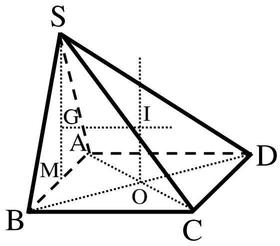
✍ *Giải*

a. Ta lần l□ợt:

- Gọi G là trọng tâm ΔSAB, thì vì:

  SA = SB = AB = a ⇔ ΔSAB đều

  ⇒ G là tâm đ□ờng tròn ngoại tiếp ΔSAB.
- Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.
- Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, ta có IG ⊥ (SAB) và IO ⊥ (ABCD).



Vậy, mặt cầu (I, IA) ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Ta có:

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

b. Ta lần l□ợt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 5: *Cho tứ diện* ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu t- ơng ứng.*

✍ *Giải*

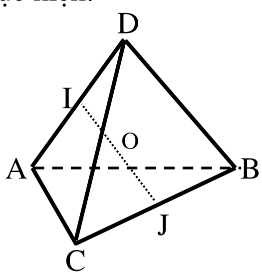
a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC, ta có nhận xét:

ΔCAD = ΔBDA (c.c.c) ⇒ IC = IB ⇒ IJ là trung trực của BC.

ΔABC = ΔDCD (c.c.c) ⇒ JA = JD ⇒ IJ là trung trực của AD.

Vậy, ta thấy AD và BC có đoạn trung trực chung IJ ta thực hiện:

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{c^2+b^2-a^2}{2}.$$



Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC, ta có:

$$\begin{cases} O \in IJ \\ OA^2 = OC^2 \end{cases}$$

Đặt OI = x, ta biến đổi điều kiện $OA^2 = OC^2$ thành:

$$IA^2 + IO^2 = JC^2 + JO^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\sqrt{\frac{c^2+b^2-a^2}{2}} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c^2+b^2-a^2}{8}}$$

$$\Rightarrow R^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là $\left(O, \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)$.

b. Ta lần lượt có:

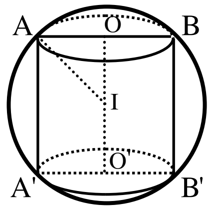
$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)^2 = \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6: *Một khối trụ có bán kính đáy* $a\sqrt{3}$, *chiều cao* $2a\sqrt{3}$. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ.*

✍ *Giải*

Gọi I là trung điểm của OO'.
Khi đó, khối cầu ngoại tiếp khối trụ có tâm I và bán kính là:



$$R = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{OA^2 + \left(\frac{OO'}{2}\right)^2}$$

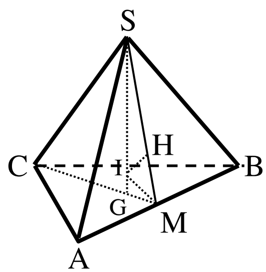
$$= \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}.$$

Do đó, ta được:

$$V_{\text{Cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(a\sqrt{6})^3 = 8\pi a^3\sqrt{6} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 7: *Cho hình chóp tứ giác đều* SABC *các cạnh bằng* a. *Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả bốn mặt của hình chóp.*

✍ *Giải*



Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra SG là trục đường tròn nội tiếp ΔABC.

Gọi M là trung điểm AB và I là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{SMG}$ với SO và hạ IH vuông góc với SM, suy ra:

$IH = IG$. (1)

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} AB \perp GM \\ AB \perp SG \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SGM) \Rightarrow AB \perp IH$$

$$\Rightarrow IH \perp (SAB) \Rightarrow IH = d(I, (SAB)).$$

Vì I thuộc SG nên I cách đều các mặt bên của hình chóp.

Kết hợp với (1), ta kết luận mặt cầu (I; IG) sẽ tiếp xúc với cả bốn mặt của hình chóp S.ABC.

Trong ΔSGM, ta có:

$$\frac{IG}{MG} = \frac{IS}{MS} \Leftrightarrow IG.MS = MG(SG - IG) \Leftrightarrow (MS + MG)IG = MG.SG$$

$$\Leftrightarrow IG = \frac{MG.SG}{MS + MG}. \qquad (2)$$

Trong đó, ta lần lượt có:

$$MG = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$SG = \sqrt{SC^2 - CG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \qquad SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào (2), ta được:

$$R = IG = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Ví dụ 8: *Cho mặt cầu bán kính* R *và một hình trụ có bán kính đáy* R *và chiều cao* 2R. *Tính tỉ số thể tích của khối cầu và khối trụ.*

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

- Khối cầu có bán kính R nên có thể tích là:

$$V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

- Khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R nên có thể tích là:

$$V_2 = \pi R^2 h = \pi R^2.2R = 2\pi R^3.$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 9: *Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy. Một hình vuông* ABCD *có cạnh bằng a và hai cạnh* AB *và* CD *lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy. Mặt phẳng* (ABCD) *không vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ.*

a. *Tính chiều cao và bán kính đáy hình trụ theo* a.
b. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính thể tích của khối trụ.*

✍ *Giải*

a. Giả sử hình trụ có bán kính đáy bằng R thì có chiều cao bằng R.

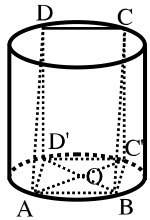
Gọi C', D' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của C, D xuống đường tròn (O), ta có:

$$BD^2 = BD'^2 + DD'^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 4R^2 + R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{2a^2}{5} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy, hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{a}{2}$ và chiều cao bằng a.

b. Ta lần lượt có:

$$S_{xq} = 2\pi R.h = 2\pi.\frac{a\sqrt{10}}{5}.\frac{a\sqrt{10}}{5} = \frac{4\pi a^2}{5} \text{ (đvdt).}$$



$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = \frac{4\pi a^2}{5} + 2\pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{5} \text{ (đvdt).}$$

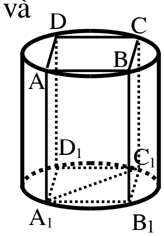
$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{5}\right)^2.\frac{a\sqrt{10}}{5} = \frac{2\pi a^3\sqrt{10}}{25} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 10: *Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là* a, b, c. *Tính thể tích của khối trụ.*

Giải

Ta có ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $AA_1 = a$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = a$ và bán kính đáy là:



$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a \text{ (đvtt).}$$

Trường hợp 2: Nếu $AA_1 = b$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = b$ và bán kính đáy là:

$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(a^2 + c^2)b \text{ (đvtt).}$$

Trường hợp 3: Nếu $AA_1 = c$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = c$ và bán kính đáy là:

$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$ (đvtt).

Ví dụ 11: *Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Mặt phẳng* (α) *song song với trục hình trụ và cắt nó theo thiết diện* ABB_1A_1. *Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy căng một cung* 120^0 *và diện tích xung quanh hình trụ là* 4π. *Tính:*

a. *Diện tích toàn phần hình trụ.*

b. *Diện tích thiết diện* ABB_1A_1.
c. *Thể tích hình trụ.*
d. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều nội tiếp hình trụ.*
e. *Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình trụ.*

✍ *Giải*

Gọi R là bán kính đáy.

a. Ta có:

$S_{xq} = 2\pi R.OO_1$; $\qquad S_{tp} = 2\pi R(R + OO_1)$

$$\Rightarrow \frac{S_{tp}}{S_{xq}} = \frac{2\pi R(R + OO_1)}{2\pi R.OO_1} = \frac{R}{OO_1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{tp} = \frac{3}{2}.4\pi = 6\pi.$$

b. Với thiết diện ABB_1A_1 ta có:

$A_1O_1B_1 = 120^0$, $\qquad A_1B_1 = 2R.\sin 120^0 = R\sqrt{3}$

Mặt khác, ta có:

$$4\pi = S_{xq} = 2\pi R.OO_1 = 2\pi R.2R \Leftrightarrow R = 1 \Rightarrow A_1B_1 = \sqrt{3}.$$

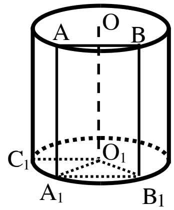
Do đó, diện tích thiết diện là:

$$S = A_1B_1.A_1A = \sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

c. Ta có ngay $V = \pi R^2h = 2\pi R^3 = 2\pi$ (đvtt).

d. Gọi A_1C_1 là cạnh của n – đa giác đều nội tiếp hình trụ, suy ra $A_1O_1C_1 = \frac{2\pi}{n}$ và diện tích đáy của hình lăng trụ bằng:

$$S_n = n.S_{\Delta A_1O_1C_1} = n.\frac{1}{2}R^2.\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n} \text{ (đvdt).}$$



Kí hiệu S là diện tích đáy hình trụ, ta có:

$$\frac{S_n}{S} = \frac{\frac{nR^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2} = \frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} \Rightarrow \frac{V_n}{V} = \frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow V_n = \frac{V.n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{2\pi.n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = n.\sin\frac{2\pi}{n} \text{ (đvtt).}$$

e. Đường tròn lớn của hình cầu ngoại tiếp hình trụ là đường tròn ngoại tiếp thiết diện qua trục, do đó bán kính mặt cầu là $R_C = R\sqrt{2}$.

Từ đó, ta được:

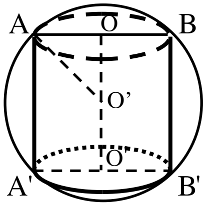
$$V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 12:</u> *Xét hình trụ nội tiếp mặt cầu bán kính* R *mà diện tích thiết diện qua trục hình trụ là lớn nhất. Tính:*

a. *Thể tích* V *và diện tích toàn phần* S_{tp} *của hình trụ.*
b. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều nội tiếp hình trụ.*
c. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều ngoại tiếp hình trụ.*

d. *Diện tích thiết diện song song với trục hình trụ và cách trục một khoảng* $\frac{R}{2}$.

✍ *Giải*



Gọi O, O_1 là tâm của hai đáy hình trụ, với thiết diện qua trục OO_1 t□ơng ứng là ABB_1A_1. Gọi O' là trung điểm OO_1, suy ra O' là tâm mặt cầu đã cho.

Kí hiệu h, r lần l□ợt là đ□ờng cao, bán kính đáy của hình trụ, khi đó diện tích thiết diện qua trục là:

$S_{td} = 2rh$.

Ta có:

$$R^2 = O'A^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow S_{td} = 2\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}.h = \sqrt{h^2(4R^2 - h^2)} \le \frac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2} = 2R^2$$

tức là $(S_{td})_{Max} = 2R^2$, đạt đ□ợc khi:

$$h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h^2 = 2R^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}.2R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2}.$$

a. Ta có:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2.R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\frac{R\sqrt{2}}{2}.R\sqrt{2} + 2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3\pi R \text{ (đvdt).}$$

b. Đáy của hình lăng trụ n – giác đều nội tiếp hình trụ có diện tích bằng $\frac{nr^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}$, do đó thể tích hình lăng trụ đó bằng:

$$V_{l.t} = \frac{nr^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}.2r = nr^3.\sin\frac{2\pi}{n} = n\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^3.\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^3\sqrt{2}}{4}.\sin\frac{2\pi}{n}.$$

c. Đa giác đều n cạnh ngoại tiếp đ□ờng tròn đáy hình trụ có độ dài cạnh bằng $2r.\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy hình lăng trụ là:

$$S_đ = n.\frac{1}{2}.r.2r.\tan\frac{\pi}{n} = nr^2.\tan\frac{\pi}{n} \text{ (đvdt).}$$

Khi đó, thể tích của lăng trụn – giác đều ngoại tiếp hình trụ là:

$$V = nr^2.\tan\frac{\pi}{n}.2r = 2nr^3.\tan\frac{\pi}{n} = 2n\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^3.\tan\frac{\pi}{n} = \frac{nR^3}{\sqrt{2}}.\tan\frac{\pi}{n}. \text{ (đvtt).}$$

d. Giả sử thiết diện là MNN_1M_1 thì MNN_1M_1 là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm của MN, ta có:

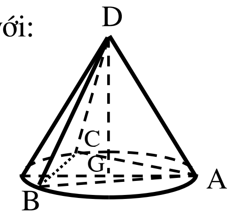
$$OI = \frac{R}{2}; \qquad IM = \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}.$$

<u>**Ví dụ 13:**</u> *Một khối tứ diện đều cạnh* a *nội tiếp trong một khối nón. Tính thể tích khối nón.*

✍ *Giải*

Tứ diện đều ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC.

Khối nón ngoại tiếp tứ diện có bán kính đáy R và chiều cao h với:



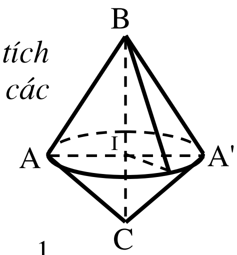
$$R = GA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$h = SG = \sqrt{SA^2 - GA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Khi đó, thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27} \text{ (đvtt).}$$

<u>**Ví dụ 14:**</u> *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AB = a, AC = b. *Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đ- ờng thẳng* BC.



✍ *Giải*

Hạ AI vuông góc với BC, khi đó:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AI^2BI + \frac{1}{3}\pi AI^2CI = \frac{1}{3}\pi AI^2(BI + CI) = \frac{1}{3}\pi AI^2BC. \quad (1)$$

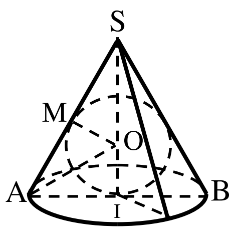
Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta đ□ợc $V = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$ (đvtt).

<u>**Ví dụ 15:**</u> *Một hình nón có chiều cao* h *và bán kính đáy bằng* r. *Hãy tính thể tích khối cầu nội tiếp hình nón.*



✍ *Giải*

Với hình nón đỉnh S và có tâm I ở đáy, suy ra SI là trục của đ□ờng tròn đáy. Trong (SIA), dựng phân giác Ax của góc $\widehat{SAI}$ và cắt SI tại O.

B

Vậy, mặt cầu (O; OI) nội tiếp hình nón.

Trong ΔSIA, ta có:

$$\frac{OI}{AI} = \frac{OS}{AS} = \frac{SI - OI}{\sqrt{SI^2 + AI^2}} \Leftrightarrow OI\sqrt{SI^2 + AI^2} = AI(SI - OI)$$

$$\Leftrightarrow OI\left(\sqrt{SI^2 + AI^2} + AI\right) = AI.SI \Leftrightarrow OI = \frac{AI.SI}{\sqrt{SI^2 + AI^2} + AI} = \frac{rh}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}.$$

Từ đó, ta được $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{rh}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}\right)^3$ (đvtt).

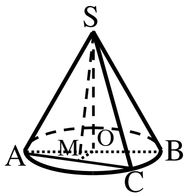
<u>Ví dụ 16:</u> *Một hình nón có đường sinh bằng* a *và góc ở đỉnh bằng* 90^0. *Cắt hình nón bằng mặt phẳng* (α) *đi qua đỉnh sao cho góc giữa* (α) *và mặt đáy của hình nón bằng* 60^0. *Tính diện tích thiết diện.*

✍ *Giải*

Giả sử ΔSAC là thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên AC, suy ra $\widehat{SMO} = 60^0$.

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SM = \frac{SO}{\sin \widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{6}}{3};\ OM = \frac{1}{2}SM = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Trong ΔAOM vuông tại M, ta có:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó, diện tích thiết diện được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3} \text{ (đvdt).}$$