

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**BÀI 29. TÍNH NHANH CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN SỐ PHỨC**

**I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

**1. Các khái niệm thường gặp**

- Đơn vị ảo là một đại lượng được kí hiệu  $i$  và có tính chất  $i^2 = -1$
- Số phức là một biểu thức có dạng  $a+bi$  trong đó  $a, b$  là các số thực. Trong đó  $a$  được gọi là phần thực và  $b$  được gọi là số ảo
- Số phức liên hợp của số phức  $z = a+bi$  là số phức  $\bar{z} = a-bi$
- Số phức nghịch đảo của số phức  $z = a+bi$  là số phức  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$
- Môđul của số phức  $z = a+bi$  được kí hiệu là  $|z|$  và có độ lớn  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**2. Lệnh Caso**

- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh tính Môđun của số phức là SHIFT HYP
- Lệnh tính số phức liên hợp  $\bar{z}$  là SHIFT 2 2
- Lệnh tính Argument của số phức là SHIFT 2 1

**II) VÍ DỤ MINH HỌA**

**VD1-[Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]**

Cho hai số phức  $z_1 = 1+i$  và  $z_2 = 2-3i$ . Tính Môđun của số phức  $z_1 + z_2$

- A.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$       B.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$       C.  $|z_1 + z_2| = 1$       D.  $|z_1 + z_2| = 5$

**GIẢI**

- Đăng nhập lệnh số phức w 2

|      Cmplx       $\square$       Math

(Khi nào máy tính hiển thị chữ Cmplx thì bắt đầu tính toán số phức được)

- Để tính Môđun của số phức ta nhập biểu thức vào máy tính rồi sử dụng lệnh SHIFT HYP

1 + b + 2 p 3 b = q c M =  
 Cmplx       $\square$       Math ▲  
**1+i+2-3i**

|Ans|      Cmplx       $\square$       Math ▲  
**3-2i**

**$\sqrt{13}$**

Vậy  $|z_1 + z_2| = \sqrt{13} \Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

**VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]**

Số phức liên hợp với số phức  $z = (1+i)^2 - 3(1+2i)^2$  là :

- A.  $-9-10i$       B.  $9+10i$       C.  $9-10i$       D.  $-9+10i$

**GIẢI**

- Sử dụng máy tính Casio tính  $z$

$$(1 + bi)^2 - 3(1 + 2bi)^2 = 9 - 10i$$

$$\Rightarrow z = 9 - 10i$$

- Số phức liên hợp của  $z = a + bi$  là  $\bar{z} = a - bi$  :

Vậy  $\bar{z} = 9 + 10i \Rightarrow$  Đáp án **B** là chính xác

**VD3-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]**

Cho số phức  $z = a + bi$ . Số phức  $z^2$  có phần ảo là :

- A.  $a^2b^2$       B.  $2a^2b^2$       C.  $2ab$       D.  $ab$

**GIẢI**

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành “cá biệt hóa” bài toán bằng cách chọn giá trị cho  $a, b$  (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

Chọn  $a = 1.25$  và  $b = 2.1$  ta có  $z = 1.25 + 2.1i$

- Sử dụng máy tính Casio tính  $z^2$

$$(1.25 + 2.1i)^2 = -\frac{1139}{400} + \frac{21}{4}i$$

Vậy phần ảo là  $\frac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là  $\frac{21}{4}$  thì đáp án đó chính xác. Ta có :

$$2 \times 1.25 \times 2.1 = \frac{21}{4}$$

Vậy  $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$  Đáp án **C** là chính xác

**VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Đề số phức  $z = a + (a-1)i$  ( $a$  là số thực) có  $|z| = 1$  thì :

- A.  $a = \frac{1}{2}$       B.  $a = \frac{3}{2}$       C.  $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$       D.  $a = \pm 1$

**GIẢI**

- Để xử lý bài này ta sử dụng phép thử, tuy nhiên ta chọn  $a$  sao cho khéo léo nhất để phép thử tìm đáp số nhanh nhất. Ta chọn  $a = 1$  trước, nếu  $a = 1$  đúng thì đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**, nếu  $a = 1$  sai thì **C** và **D** đều sai.

- Với  $a = 1$  Sử dụng máy tính Casio tính  $z$

$$1 + (1 - 1)i = 1$$

CMPLX  Math ▲  
|Ans|

1

Vậy  $|z|=1 \Rightarrow$  Đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

➤ Thử với  $a=0$  Sử dụng máy tính Casio tính  $z$  :

$$0 + (0 - 1) i = 0 - 1i$$

CMPLX  Math ▲  
0+(0-1)i

-i

CMPLX  Math ▲  
|Ans|

1

Vậy  $|z|=1 \Rightarrow$  Đáp án chính xác là **C**

**VD5-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng – Đắk Nông lần 1 năm 2017]**

Số phức  $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20}$  có giá trị bằng :

- A.  $-2^{20}$       B.  $-2^{10} + (2^{20} + 1)i$       C.  $2^{10} + (2^{10} + 1)i$       D.  $2^{10} + 2^{10}i$

**GIẢI**

➤ Nếu ta nhập cả biểu thức  $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20}$  vào máy tính Casio thì vẫn được, nhưng mất nhiều thao tác tay. Để rút ngắn công đoạn này ta tiến hành rút gọn biểu thức

Ta thấy các số hạng trong cùng biểu thức đều có chung một quy luật “số hạng sau bằng số hạng trước nhân với đại lượng  $1+i$ ” vậy đây là cấp số nhân với công bội  $1+i$

$$\Rightarrow 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20} = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

➤ Với  $z = \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$  Sử dụng máy tính Casio tính  $z$

$$a 1 p ( 1 + b ) ^ 2 1 R 1 p ( 1 + b ) =$$

CMPLX  Math ▲  
 $\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$   
-1024+1025i

Ta thấy  $z = -1024 + 1025i = -2^{10} + (2^{10} + 1)i$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **B**

**VD6-[Thi thử chuyên KHTN lần 1 năm 2017]**

Nếu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=1$  thì phần thực của  $\frac{1}{1-z}$  bằng :

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C. 2      D. Một giá trị khác

**GIẢI**

- Đặt số phức  $z = a + bi$  thì Môđun của số phức  $z$  là  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$
- Chọn  $a = 0.5 \Rightarrow \sqrt{0.5^2 + b^2} = 1$ . Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm  $b$

w 1 s 0 . 5 d + Q ) d \$ p 1 q r 0 . 5 =

$$\sqrt{0.5^2 + X^2} - 1$$

$$X = 0.8660254038$$

$$L-R = 0$$

Lưu giá trị này vào  $b$

q J x

Ans → B

$$0.8660254038$$

- Trở lại chế độ CMPLX để tính giá trị  $\frac{1}{1-z}$ :

w 2 a 1 R 1 p ( 0 . 5 + Q x b ) =

$$\frac{1}{1 - (0.5 + 6i)}$$

$$\frac{1}{2} + 0.8660254038i$$

Vậy phần thực của  $z$  là  $\frac{1}{2} \Rightarrow$  Đáp án chính xác là **A**

**VD7-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]**

Tìm số phức  $z$  biết rằng:  $(1+i)z - 2\bar{z} = -5 + 11i$

- A.  $z = 5 - 7i$    B.  $z = 2 + 3i$    C.  $z = 1 + 3i$    D.  $z = 2 - 4i$

**GIẢI**

- Với  $z = 5 - 7i$  thì số phức liên hợp  $\bar{z} = 5 + 7i$ . Nếu đáp án A đúng thì phương trình:  $(1+i)(5-7i) - 2(5+7i) = -5 + 11i$  (1)

- Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

( 1 + b ) ( 5 p 7 b ) p 2 ( 5 + 7 b ) =

$$(1+i)(5-7i) - 2(5+7i)$$

$$2-16i$$

Vì  $2-16i \neq -5+11i$  nên đáp án A sai

- Tương tự như vậy với đáp án B

( 1 + b ) ( 2 + 3 b ) p 2 ( 2 p 3 b ) =

$$(1+i)(2+3i) - 2(2+3i)$$

$$-5+11i$$

Dễ thấy vế trái (1) = vế phải (1) =  $-5+11i$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

**VD8-[Đề minh họa của bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]**

Cho số phức  $z = a + bi$  thỏa mãn  $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$ . Tính  $P = a + b$

A.  $P = \frac{1}{2}$

B.  $P = 1$

C.  $P = -1$

D.  $P = -\frac{1}{2}$

**GIẢI**

- Phương trình  $\Leftrightarrow (1+i)z + 2\bar{z} - 3 - 2i = 0$  (1). Khi nhập số phức liên hợp ta nhấn lệnh  $\text{Conj}$

$\text{Conj}(i)$

- Sử dụng máy tính Casio nhập về trái của (1)

$\text{Conj}(X) - 3 - 2i$

- $X$  là số phức nên có dạng  $X = a + bi$ . Nhập  $X = 1000 + 100i$  (có thể thay  $a; b$  là số khác)

$(1+i)X + 2\text{Conj}(X)$

$2897 + 898i$

Vậy về trái của (1) bằng  $2897 + 898i$ . Ta có:  $\begin{cases} 2897 = 3 \cdot 1000 - 100 - 3 = 3a - b - 3 \\ 898 = 1000 - 100 - 2 = a - b - 2 \end{cases}$

Mặt khác đang muốn về trái  $= 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - b - 3 = 0 \\ a - b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{-3}{2}$

Vậy  $a + b = -1$   
 $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

**VD9**-Số phức  $z = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$  có một Acgument là:

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\frac{8\pi}{3}$

**GIẢI**

- Thu gọn  $z$  về dạng tối giản  $\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i$

$\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

$-1 + \sqrt{3}i$

- Tìm Acgument của  $z$  với lệnh  $\text{SHIFT } 2 \ 1$

$\text{Arg}(z)$

$$\text{arg}(-1+\sqrt{3}i)$$

$$\frac{2}{3}\pi$$

Vậy  $z$  có 1 Argument là  $\frac{2\pi}{3}$ . Tuy nhiên khi so sánh kết quả ta lại không thấy có giá trị nào là  $\frac{2\pi}{3}$ . Khi đó ta nhớ đến tính chất “Nếu góc  $\alpha$  là một Argument thì góc  $\alpha + 2\pi$  cũng là một Argument”  
 $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D** vì  $\frac{2\pi}{2} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

### III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### **Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]**

Cho hai số phức  $z_1 = 1+i, z_2 = 2+3i$ . Tìm số phức  $w = (z_1)^2 \cdot z_2$

A.  $w = 6+4i$     B.  $w = 6-4i$     C.  $w = -6-4i$     D.  $w = -6+4i$

#### **Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]**

Cho số phức  $z = a+bi$ . Số phức  $z^{-1}$  có phần thực là :

A.  $a+b$     B.  $\frac{a}{a^2+b^2}$     C.  $\frac{-b}{a^2+b^2}$     D.  $a-b$

#### **Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]**

Tìm môđun của số phức  $z = 2 - \sqrt{3}i \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$  là :

A.  $\frac{\sqrt{103}}{2}$     B.  $\frac{3\sqrt{103}}{2}$     C.  $\frac{5\sqrt{103}}{2}$     D. Đáp án khác

#### **Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]**

Cho số phức  $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$ . Phần thực của số phức  $z$  là :

A.  $-2^{11}$     B.  $-2^{11} + 2$     C.  $-2^{11} - 2$     D.  $2^{11}$

#### **Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]**

Cho số phức  $z = 2-3i$ . Phần ảo của số phức  $w = (1+i)z - (2-i)\bar{z}$  là :

A.  $-9i$     B.  $-9$     C.  $-5$     D.  $-5i$

#### **Bài 6-[Đề thi Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009]**

Cho số phức  $z = a+bi$  thỏa mãn điều kiện  $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$ .

Tìm  $P = 2a+b$  A. 3    B. -1    C. 1    D. Đáp án khác

#### **Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]**

Cho số phức  $z = a+bi$  thỏa mãn điều kiện  $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$ .

Tìm  $P = 2a+b$  A. 3    B. -1    C. 1    D. Đáp án khác

### LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### **Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]**

Cho hai số phức  $z_1 = 1+i, z_2 = 2+3i$ . Tìm số phức  $w = (z_1)^2 \cdot z_2$

A.  $w = 6+4i$     B.  $w = 6-4i$     C.  $w = -6-4i$     D.  $w = -6+4i$

#### GIẢI

- Sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 2 (CMPLX)

$$(1 + bi) \cdot (2 + 3bi) =$$

$$(1+i)^2 \times (2+3i) = -6+4i$$

Vậy  $w = -6 + 4i$  ta chọn **D** là đáp án chính xác

**Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]**

Cho số phức  $z = a + bi$ . Số phức  $z^{-1}$  có phần thực là :

- A.  $a + b$                       B.  $\frac{a}{a^2 + b^2}$                       C.  $\frac{-b}{a^2 + b^2}$                       D.  $a - b$

**GIẢI**

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn  $a = 1; b = 1.25$ .
- Với  $z^{-1} = \frac{1}{z}$  Sử dụng máy tính Casio

$$a \ 1 \ R \ 1 \ + \ 1 \ . \ 2 \ 5 \ b \ =$$

$$\frac{1}{1+1.25i} = \frac{16}{41} - \frac{20}{41}i$$

Ta thấy phần thực số phức  $z^{-1}$  là :  $\frac{16}{41}$  đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn  $b > a > 0$  nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có  $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$  vậy đáp số A cũng sai  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **B**

**Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]**

Tìm môđun của số phức  $z = 2 - \sqrt{3}i \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$  là :

- A.  $\frac{\sqrt{103}}{2}$                       B.  $\frac{3\sqrt{103}}{2}$                       C.  $\frac{5\sqrt{103}}{2}$                       D. Đáp án khác

**GIẢI**

- Tính số phức  $z = 2 - \sqrt{3}i \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$

$$2 \ p \ s \ 3 \ \$ \ b \ ( \ a \ 1 \ R \ 2 \ \$ \ + \ s \ 3 \ \$ \ b \ ) \ =$$

$$2 - \sqrt{3}i \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right) = 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vậy  $z = 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Dùng lệnh SHIFT HYP tính Môđun của số phức  $z$  ta được

$$q \ c \ 5 \ p \ a \ s \ 3 \ R \ 2 \ \$ \ b \ =$$

$$\left| 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{103}}{2}$$

Vậy  $|z| = \frac{\sqrt{103}}{2} \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**

**Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]**

Cho số phức  $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$ . Phần thực của số phức  $z$  là :

- A.  $-2^{11}$       B.  $-2^{11} + 2$       C.  $-2^{11} - 2$       D.  $2^{11}$

**GIẢI**

- Dãy số trên là một cấp số nhân với  $U_1 = (1+i)^2$ , số số hạng là 21 và công bội là  $1+i$ . Thu

gọn  $z$  ta được :  $z = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính  $z$

( 1 + b ) d O a 1 p ( 1 + b ) ^ 2 1 R 1 p ( 1 + b ) =

CMPLEX    □    Math ▲  
 $(1+i)^2 \times \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$   
**-2050-2048i**

Vậy  $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$  Phần ảo số phức  $z$  là  $-2050 = -2^{11} - 2 \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **C**

**Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]**

Cho số phức  $z = 2 - 3i$ . Phần ảo của số phức  $w = (1+i)z - (2-i)\bar{z}$  là :

- A.  $-9i$       B.  $-9$       C.  $-5$       D.  $-5i$

**GIẢI**

- Dãy số trên là một cấp số nhân với  $U_1 = (1+i)^2$ , số số hạng là 21 và công bội là  $1+i$ . Thu

gọn  $z$  ta được :  $z = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính  $z$

( 1 + b ) d O a 1 p ( 1 + b ) ^ 2 1 R 1 p ( 1 + b ) =

CMPLEX    □    Math ▲  
 $(1+i)^2 \times \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$   
**-2050-2048i**

Vậy  $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$  Phần ảo số phức  $z$  là  $-2048 = -2^{11} \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**

**Bài 6-[Đề thi Đại học -Cao đẳng khối A năm 2009]**

Cho số phức  $z = a + bi$  thỏa mãn điều kiện  $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$

- .Tìm  $P = 2a + b$  A. 3      B. -1      C. 1      D. Đáp án khác

**GIẢI**

- Phương trình  $\Leftrightarrow (2-3i)z + (4+i)\bar{z} + (1+3i)^2 = 0$

- Nhập về trái vào máy tính Casio và CALC với  $X = 1000 + 100i$

( 2 p 3 b ) Q ) + ( 4 + b ) q 2 2 Q ) ) + ( 1 + 3 b ) d r 1 0 0 0 + 1 0 0 b =



$$(2-3i)X+(4+i)COP$$

$$6392-2194i$$

Vậy vế trái =  $6392-2194i$  với  $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$

▪ Để vế trái = 0 thì  $\begin{cases} 6a + 4b - 8 = 0 \\ 2a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy  $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **C**

**Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]**

Cho số phức  $z = a + bi$  thỏa mãn điều kiện  $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$ .

Tìm  $P = 2a + b$  **A. 3** **B. -1** **C. 1** **D. Đáp án khác**

**GIẢI**

▪ Phương trình  $\Leftrightarrow (2-3i)z + (4+i)\bar{z} + (1+3i)^2 = 0$

▪ Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với  $X = 1000 + 100i$

$$(2-3i)X+(4+i)COP$$

$$6392-2194i$$

Vậy vế trái =  $6392-2194i$  với  $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$